

## LIGO-GW150914 (10 punkti)

2015. aastal detekteeris gravitatsioonilainete observatoorium LIGO esimest korda läbi Maa leviva gravitatsioonilaine. Selle sündmuse nimega GW150914 põhjustas kaks ligikaudu ringikujulistel orbiitidel tiirlevat musta auku. Selles ülesandes hindate mõõdetud signaali omaduste põhjal mõnda selle süsteemi füüsikalist parameetrit.

### Osa A: Newtoni (konservatiivsed) orbiidid (3,0 punkti)

- A.1** Vaadake kahe tähe süsteemi massidega  $M_1, M_2$  vastavalt asukohtades  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  1.0pt massikeskme süsteemis, see tähendab,

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1)$$

Tähed on ülejäänud Universumist isoleeritud ja liiguvad mitterelativistliku kiirusega. Newtoni seaduste kohaselt avaldub massi  $M_1$  kiirendusvektor kui

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}, \quad (2)$$

kus  $r_1 = |\vec{r}_1|, r_2 = |\vec{r}_2|$ . Leidke  $n \in \mathbb{N}$  ja  $\alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$ , kus  $G$  on Newtoni gravitatsioonikonstant [ $G \simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{kg}^{-2}$ ].

- A.2** Kirjeldatud kahe keha süsteemi koguenergia ringorbiitidel on avaldatav kui 1.0pt

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}, \quad (3)$$

kus

$$\mu \equiv \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{ja} \quad M \equiv M_1 + M_2 \quad (4)$$

on vastavalt süsteemi *taandatud mass* ja *kogumass*,  $\Omega$  on kummagi keha ringsagedus ja  $L$  on koguvahekaugus  $L = r_1 + r_2$ . Avaldage liige  $A(\mu, \Omega, L)$  ilmutatud kujul.

- A.3** Võrrand 3 lihtsustub kujule  $E = \beta G \frac{M\mu}{L}$ . Määrake arv  $\beta$ . 1.0pt

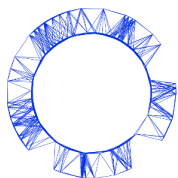
### Osa B: toome sisse relativistliku dissipatsiooni (7,0 punkti)

Õige gravitatsiooniteooria — *üldrelatiivsusteooria* — pani kirja Einstein 1915. aastal; selle kohaselt levib gravitatsioon valguse kiirusele. Selle vastastikmõju "kulleriteks" on gravitatsioonilained. Neid kiiratakse alati, kui masse kiirendatakse, ja selle tõttu kaotab masside süsteem energiat.

Vaadelgem kahe punktosaakese süsteemi, mis on ülejäänud Universumist isoleeritud. Einstein tõestas, et piisavalt väikeste kiiruste puhul on kiiratud gravitatsioonilained: 1) kaks korda kõrgema sagedusega tiirlemissagedusest; 2) iseloomustatavad heleduse ehk kiiratava võimsusega  $\mathcal{P}$ , milles domineerib Einsteini kvadrupoolvalem

$$\mathcal{P} = \frac{G}{5c^5} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left( \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right). \quad (5)$$

## Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q1-2

Estonian Estonian (Estonia)

Siin  $c$  on valguse kiirus  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s. Kahe  $x - y$ -tasandis tiirleva osakese jaoks on  $Q_{ij}$  antud järgneva tabeliga ( $i, j$  nummerdab ridu/veerge):

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2), \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2), \quad Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2), \quad (6)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A \quad (7)$$

ja  $Q_{ij} = 0$  kõigi teiste kombinatsioonide puhul. Siin tähendab  $(x_A, y_A)$  keha  $A$  asukohta massikeskme taustsüsteemis.

- B.1** Osas A.2 kirjeldatud ringorbiitide puhul avalduvad  $Q_{ij}$  komponendid aja  $t$  funktsioonina kui 1.0pt

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt), \quad Q_{ij} \stackrel{i \neq j}{=} \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt. \quad (8)$$

Avaldage  $k$  parameetri  $\Omega$  ja konstantide  $a_i, b_i, c_{ij}$  kaudu.

- B.2** Avaldage kirjeldatud süsteemist kiirataivate gravitatsioonilainete heledus  $\mathcal{P}$  kujul 1.0pt

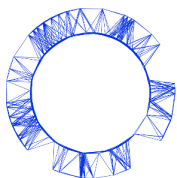
$$\mathcal{P} = \xi \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega^6. \quad (9)$$

Mis on arvu  $\xi$  väärtus? [Kui te ei suuda leida arvu  $\xi$ , siis kasutage järgnevais küsimusis väärtust  $\xi = 6,4$ .]

- B.3** Kui gravitatsioonilaineid ei oleks, tiirleksid kaks massi kindlal ringorbiidil igaves- 1.0pt  
ti. Gravitatsioonilainete kiirgamise tõttu aga kaotab süsteem energiat ja ringorbiidid jäävad tasapisi väiksemaks. Näidake, et orbiidi nurkkiiruse muutumise kiirus  $\frac{d\Omega}{dt}$  on viidav kujule

$$\left( \frac{d\Omega}{dt} \right)^3 = (3\xi)^3 \frac{\Omega^{11}}{c^{15}} (GM_c)^5, \quad (10)$$

kus muutujat  $M_c$  nimetatakse *siutsumassiks* (inglise keeles *chirp mass*). Avaldage  $M_c$  masside  $M$  ja  $\mu$  funktsioonina. See mass määrab sageduse kasvamise orbiidi kokkukerimisel. [Nimi "siuts" viitab kõrgele tõusva sagedusega helile väikese linnu laulus.]



- B.4** Kasutades ülaltoodud teadmisi, seostage orbiidi nurkkiirus  $\Omega$  gravitatsioonilainete sagedusega  $f_{\text{GW}}$ . Teades veel, et suvalise sileda funktsiooni  $F(t)$  ja konstandi  $a \neq 1$  puhul 2.0pt

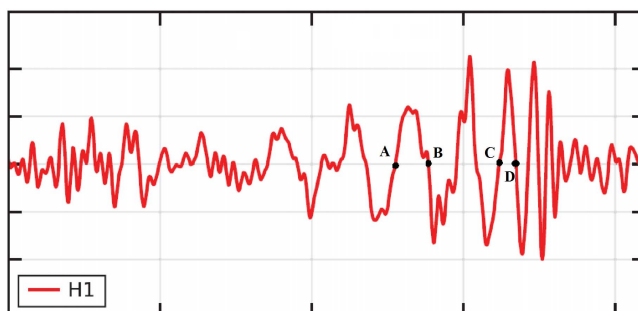
$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^a \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1-a} = \chi(1-a)(t-t_0), \quad (11)$$

kus  $\chi$  on konstant ja  $t_0$  on integreerimiskonstant, näidake, et valemist (10) tuleb gravitatsioonilainete sagedus

$$f_{\text{GW}}^{-8/3} = 8\pi^{8/3} \xi \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{(2/3)+p} (t_0 - t)^{2-p}, \quad (12)$$

ja määrake konstant  $p$ .

14.09.2015 tuvastasid LIGO kaks detektorit (kummalgi kaks L-kujulist 4 km pikkust haara) sündmuse GW150914. Haarade pikkus muutus vastavalt Joonisele 1. Detektori haarad reageerivad mööduvale gravitatsioonilainele lineaarselt ja lugem järgib lainekuju. Selle laine tekitas kaks ligikaudu ringikujulisel orbiidil liikuvat musta auku. Energiakadu gravitatsioonilainetesse põhjustas orbiidi kahanemise kuni mustade aukude pörkeni. Kokkupõrkehetk vastab Joonisel 1 ligikaudu signaaliipigile pärast punkti D.



Joonis 1. Suhteline LIGO detektori H1 haara pikenemine. Horisontaalteljel on aeg ja punktidele A, B, C, D vastab  $t = 0.000, 0.009, 0.034$  ja  $0.040$  sekundit.

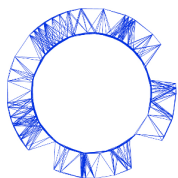
- B.5** Hinnake joonise põhjal sagedust  $f_{\text{GW}}(t)$  kohtadel 1.0pt

$$t_{\overline{AB}} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{ja} \quad t_{\overline{CD}} = \frac{t_D + t_C}{2}. \quad (13)$$

Eeldades, et valem (12) kehtib kuni kokkupõrkeni (mis rangelt võttes küll pole nii) ja et kahel kehal on võrdne mass, hinnake siutsumassi  $M_c$  ja süsteemi kogumassi Päikese massides  $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$  kg.

- B.6** Hinnake vähimat kehade keskpunktide vahelist kaugust orbiidil hetkel  $t_{\overline{CD}}$ . Arvutage siit ühe keha suurim võimalik suurus  $R_{\text{max}}$ . Leidke  $R_\odot/R_{\text{max}}$ , et võrrelda seda suurus meie Päikese raadiusega,  $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$  km. Hinnake veel nende orbitaalkiirust  $v_{\text{col}}$  sel hetkel ja selle suhet valguse kiirusesse,  $v_{\text{col}}/c$ . 1.0pt

Järeldage, et need olid tõepoolest erakordselt kiired ja erakordselt kompaktsed kehad!



## Kus on neutriino? (10 punkti)

Kahe väga kõrge energiaga prootoni põrkumisel Suures Hadronite Põrgutis (Large Hadron Collider, lühend LHC) tekib põrkumise tagajärjel palju uusi osakesi nagu elektronid, müüonid, neutriinod, kvargid ja nende vastavad antiosakesed. Enamikku neist osakestest saab detekteerida põrkepunkti ümbritseva osakestetektorite abil. Näiteks kvargid muunduvad hadronisatsiooni protsessis subatomaarsete osakeste joaks. Lisaks võimaldab detektoris olev tugev magnetväli isegi väga kõrge energiaga laetud osakesi piisavalt kõrvale kallutada, et selle põhjal nende impulssi määrata. ATLAS-e detektoris kasutatav ülijuhtivate solenoidide süsteem tekitab konstantse ja ühtlase magnetvälja tugevusega **2,00 teslat** kokkupõrkepunkti ümbritsevas detektoris sisepiirkonnas. Kui laetud osakeste impulss jääb alla teatud läviväärtuse, siis nende trajektoor kõverdub nii tugevalt, et osakesed jäävadki magnetväljas pöörlema, ja seetõttu neid tõenäoliselt ei detekteeritagi. Neutriinosid ei detekteerita üldse, sest need läbivad detektorit ilma igasuguse interaktsioonita.

Andmed: elektroni seisumass  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg; elementaarlaeng  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C;

Valguse kiirus  $c = 3.00 \times 10^8$  m s<sup>-1</sup>; vaakumi dielektriline läbitavus  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F m<sup>-1</sup>

### Osa A. Osakestetektor ATLAS-e füüsika (4,0 punkti)

- A.1** Tuletage tsüklotronraadiuse  $r$  avaldis ringjoonelisel orbiidil liikuva elektroni jaoks, millele mõjub kiirusega ristsuunaline magnetjõud. Avaldage see raadius funktsioonina elektroni kineetilisest energiast  $K$ , laengu absoluutväärtusest  $e$ , massist  $m$  ja magnetväljast  $B$ . Eeldage, et elektron on mitte-relativistlik klassikaline osake. 0.5pt

ATLAS-e detektoris tekkivaid elektrone tuleb käsitleda relativistlike osakestena. Siiski kehtib ka relativistliku osakese jaoks sama tsüklotronraadiuse valem, kui arvestada relativistliku impulsi.

- A.2** Arvutage elektroni impulsi minimaalne väärtus, mis võimaldab elektronil detektoris sisepiirkonnast radiaalselt väljuda. Detektoris sisepiirkond on silindrilise kujuga raadiusega 1,1 meetrit. Elektron tekib osakeste kokkupõrkel täpselt silindri keskpunktis. Avaldage oma vastus MeV/c ühikutes. 0.5pt

Kui relativistlikku osakest laenguga  $e$  ja seisumassiga  $m$  kiirendada osakese kiirusvektoriga ristsuunas, siis kiirgub elektromagnetiline kiirgus, mida nimetatakse sünkrotronkiirguseks. Kiiratav võimsus avaldab kujul

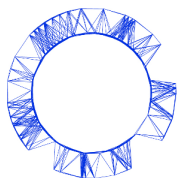
$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

kus  $a$  on kiirendus ja  $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ .

- A.3** Osakest nimetatakse ultrarelativistlikuks, kui selle kiirus on väga lähedane valguse kiirusele. Ultrarelativistliku osakese kiiratav võimsus avaldub kujul 1.0pt

$$P = \xi \frac{e^4}{\epsilon_0 m^k c^n} E^2 B^2,$$

kus  $\xi$  on reaalarv,  $n, k$  on täisarvud,  $E$  on laetud osakese energia ja  $B$  on magnetväli. Leidke suurused  $\xi, n$  ja  $k$ .



- A.4** Ultrarelativistlikul juhul avaldub elektroni energia funktsioonina ajast kujul 1.0pt

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t},$$

kus  $E_0$  on elektroni energia alghetkel. Leidke  $\alpha$  funktsioonina suurustest  $e$ ,  $c$ ,  $B$ ,  $\epsilon_0$  ja  $m$ .

- A.5** Vaadeldgem elektroni, mis tekib kokkupõrkepunktis ja hakkab liikuma radiaalselt energiaga 100 GeV. Hinnake energia hulka, mille kaotab elektron sünkrotronkiirgusena kuni hetkeni, mil elektron väljub detektori sisepiirkonnast. Avaldage oma vastus MeV ühikutes. 0.5pt

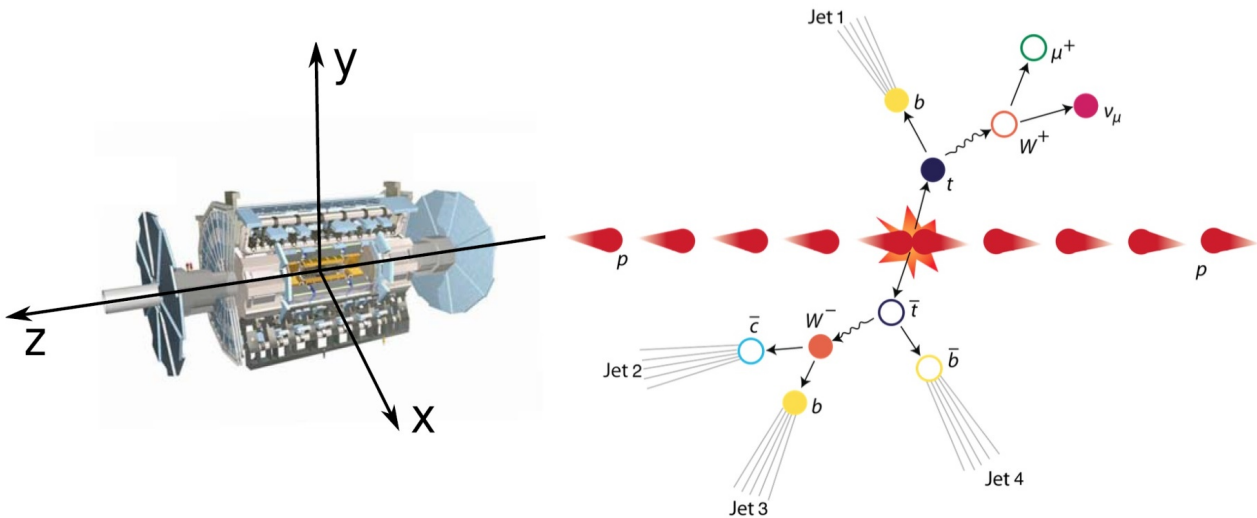
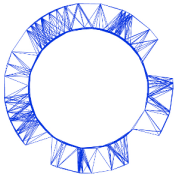
- A.6** Avaldage elektroni tsüklotronsagedus funktsioonina ajast eeldusel, et kehtib ultrarelativistlik lähendus. 0.5pt

### Osa B. Neutriino otsimine (6,0 punkti)

Joonisel 1 kujutatud kahe prootoni kokkupõrke tulemusel tekivad top-kvark ( $t$ ) ja anti-top kvark ( $\bar{t}$ ), mis on raskeimad elementaarosakesed, mida kunagi on detekteeritud. Top-kvark laguneb  $W^+$  bosoniks ja bottom-kvargiks ( $b$ ). Anti-top kvark laguneb  $W^-$  bosoniks ja anti-bottom kvargiks ( $\bar{b}$ ). Joonisel 1 kujutatud juhul laguneb  $W^+$  boson anti-müüoniks ( $\mu^+$ ) ja neutriinoks ( $\nu$ ) ning  $W^-$  boson laguneb kvargiks ja anti-kvargiks. Siin ülesandes on eesmärgiks rekonstrueerida neutriino koguimpulss, kasutades mõningate detekteeritud osakeste impulsse. **Lihtsuse huvides arvestagem, et kõiki osakesi ja jugasid, välja arvatud top-kvark ja  $W^\pm$  bosonid, võib käsitleda massitutena.**

Top-kvargi lagunemisproduktide impulsse, välja arvatud neutriino impulsi  $z$ -suunaline komponent, on võimalik määrata eksperimendist (vt tabelit). Lõppstaadiumi osakeste summaarne impulss on null ainult rist-tasandis ( $xy$ -tasand), kuid mitte pörke teljes ( $z$ -telg). Seetõttu on neutriino rist-suunaline impulss leitav rist-tasandi puuduva impulsina.

LHC juures asuva ATLAS-e eksperimendis mõõdeti 4. juunil 2015 kell 00:21:24 GMT+1 niisugune prooton-prooton kokkupõrge, nagu kujutatud Joonisel 1.



Joonis 1. ATLAS-e detektori skeem koos koordinaattelgedega (vasakul) ja prooton-prooton kokkupõrke skemaatiline esitus (paremal).

Järgnevas tabelis on esitatud top-kvargi lagunemise lõppstaadiumis tekkinud osakeste (sealhulgas neutriino) impulsside komponendid.

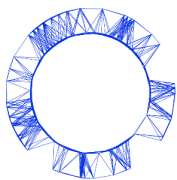
Osake	$p_x$ (GeV/c)	$p_y$ (GeV/c)	$p_z$ (GeV/c)
anti-müüon ( $\mu^+$ )	-24.7	-24.9	-12.4
juga 1 ( $j_1$ )	-14.2	+50.1	+94.1
neutriino ( $\nu$ )	-104.1	+5.3	—

**B.1** Leidke võrrand, mis seob  $W^+$  bosoni massi ruudu  $m_W^2$  neutriino ja anti-müüoni impulsi komponentidega, mis on esitatud eelnevas tabelis. Avaldage oma vastus neutriino ja anti-müüoni ristsuunalise impulsi,  $\vec{p}_T^{(\nu)} = p_x^{(\nu)} \hat{i} + p_y^{(\nu)} \hat{j}$  ja  $\vec{p}_T^{(\mu)} = p_x^{(\mu)} \hat{i} + p_y^{(\mu)} \hat{j}$ , ning nende impulsi  $z$ -komponendi,  $p_z^{(\mu)}$  ja  $p_z^{(\nu)}$  kaudu. 1.5pt

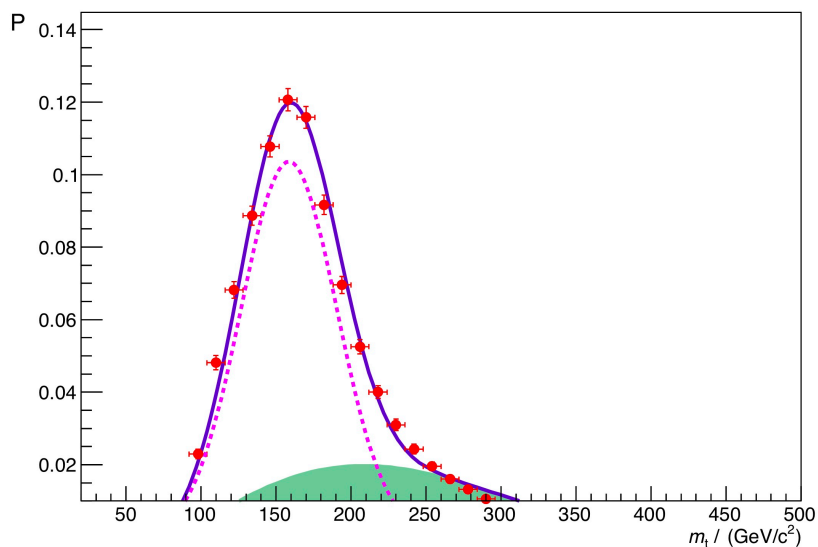
**B.2** Eeldusel, et  $W^+$  bosoni mass  $m_W = 80.4 \text{ GeV}/c^2$ , arvutage kaks võimalikku lahendit neutriino  $z$ -telje suunalisele impulsile  $p_z^{(\nu)}$ . Esitage oma vastused  $\text{GeV}/c$  ühikutes. 1.5pt

**B.3** Arvutage top-kvargi mass kummagi eelnevalt leitud lahendi jaoks. Esitage oma vastus  $\text{GeV}/c^2$  ühikutes. [Kui te ei suutnud leida alapunktis B.2 kahte lahendit, kasutage numbrilisi väärtusi:  $p_z^{(\nu)} = 70 \text{ GeV}/c$  ja  $p_z^{(\nu)} = -180 \text{ GeV}/c$ .] 1.0pt

Top-kvargi massi eksperimentaalsel mõõtmisel on tulemuseks saadud pörkesündmuste arvul kaks kom-



ponenti: "signaal", mis tuleneb top-kvarkide lagunemise sündmustest, ja "taust", mis tuleneb teistest protsessidest, mis ei sisalda top-kvarke. Eksperimentaalsed mõõtmistulemused sisaldavad neid mõlemat komponenti, vt Joonis 2.

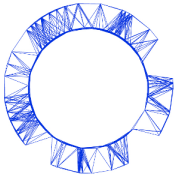


Joonis 2. Top-kvargi massi jaotus mõõdetuna eksperimentidest: normeeritud sündmuste arv sõltuvana top-kvargi massist. Ristikesed tähistavad mõõdetud andmepunkte. Punktiirjoon tähistab "signaali" ja värvitud ala tähistab "tausta".

**B.4** Läheldes top-kvargi massi jaotusest, milline neist kahest eelnevalt leitud lahendist on suurema tõenäosusega õige? Hinnake, millise tõenäosusega see lahend esineb. 1.0pt

**B.5** Kasutades kõige tõenäolisemat lahendit, arvutage, kui pika vahemaa läbib top-kvark enne lagunemist. Eeldage, et paigalseisva top-kvargi keskmine eluiga on  $5 \times 10^{-25}$  s. 1.0pt

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-1

Estonian Estonian (Estonia)

## Elussüsteemide füüsika (10 punkti)

Andmed: atmosfääri normaalrõhk  $P_0 = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$

### Osa A. Veresoonte füüsika (4,5 punkti)

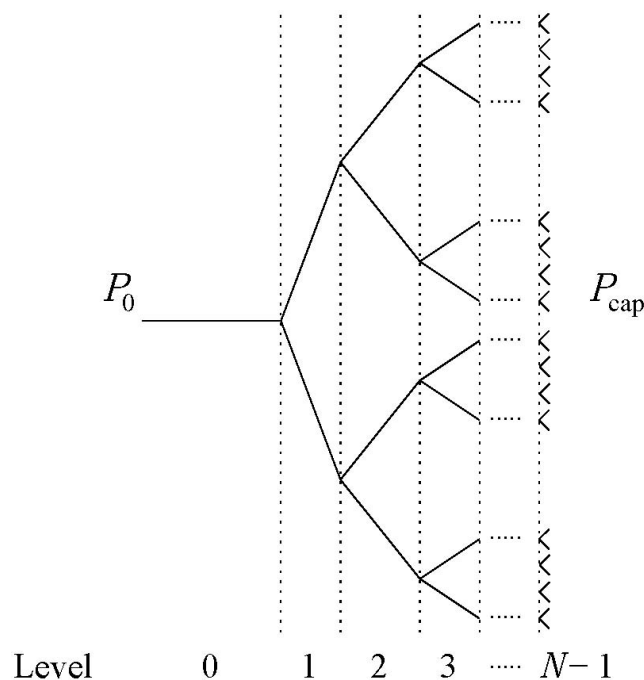
Selles osas analüüsime kahte lihtsustatud vere voolamise mudelit veresoontes.

Veresooned on ligikaudu silindrilise kujuga. On teada, et kui jäigas silindris on muutumatu mitte-turbulentne kokkusurumatu vedeliku vool, siis vedeliku rõhkude vahe silindri otstel avaldub kujul:

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q, \quad (1)$$

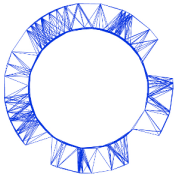
kus  $\ell$  ja  $r$  on silindri pikkus ja raadius,  $\eta$  on vedeliku viskoossus ja  $Q$  on ruumala vooluhulk ajaühikus, st vedeliku ruumala, mis läbib silindri ristlõiget ajaühikus. See avaldis annab veresoone otste rõhkude vahe jaoks suurusjärguliselt õige tulemuse isegi, kui mitte arvestada verevoolu pulseerimist, veresoone kokkusurutatavust ja ebaühtlast kuju ning asjaolu, et veri pole mitte lihtne vedelik, vaid koosneb rakkude ja vereplasma segust. Enamgi veel, see avaldis on olemuselt sarnane Ohmi seadusele, kus ruumala vooluhulka ajaühikus võib tõlgendada elektrivoolu tugevusena, rõhkude vahet pingena ning tegurit  $R = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4}$  takistusena.

Vaadeldagem näitena arterioolide (väikesed arterid) sümmeetrilist võrgustikku nagu näidatud Joonisel 1. See võrgustik viib vere kuni lõppkapillaarideni. Iga veresoone hargnemispunktis jaguneb veresoone kaheks ühesuguseks veresooneks. Seejuures on kõrgemate tasemete veresooned kitsamad ja lühemad. Eeldagem, et kahel järjestikusel tasemel  $i$  ja  $i + 1$  olevate veresoonte raadiused ja pikkused on seotud võrranditega  $r_{i+1} = r_i/2^{1/3}$  ja  $\ell_{i+1} = \ell_i/2^{1/3}$ .



Joonis 1. Arterioolide võrgustik.

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-2

Estonian Estonian (Estonia)

**A.1** Avaldage vedeliku ruumala vooluhulk ajaühikus  $Q_i$  taseme  $i$  veresoones funktsioonina tasemete koguarvust  $N$ , vedeliku viskoossusest  $\eta$ , raadiusest  $r_0$ , pikkusest  $\ell_0$  ning erinevusest  $\Delta P = P_0 - P_{\text{cap}}$  tasemel 0 oleva arteriooli rõhu  $P_0$  ja lõppkapillaaride rõhu  $P_{\text{cap}}$  vahel. 1.3pt

**A.2** Arvutage numbriline väärtus ruumala vooluhulgale ajaühikus  $Q_0$  taseme 0 arterioolis, kui selle raadius on  $6.0 \times 10^{-5}$  m ning pikkus  $2.0 \times 10^{-3}$  m. Arvestage, et rõhk arteriooli algpunktis on 55 mmHg, ning veresoonte võrkustikus on  $N = 6$  taset, mis ühendavat seda arteriooli ja lõppkapillaare, kus rõhk on 30 mmHg. Arvestage, et vere viskoossus  $\eta = 3.5 \times 10^{-3}$  kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>. Avaldage on vastus ml/h ühikutes. 0.5pt

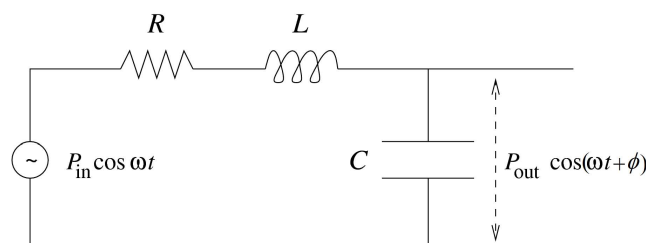
## LCR elektriabel veresoone mudelina

Mitmetel põhjustel pole siiski sobiv veresoone lähendada jäiga silindriga. Eriti oluline on arvestada voolu ajalise sõltuvusega ja arvesse võtta veresoonte diameetri muutumist, mis on tingitud rõhu muutumisest südame pumpamise tsükli jooksul. On täheldatud, et suurtes veresoontes muutub vererõhk tsükli jooksul märkimisväärselt, samas aga väiksemates veresoontes on rõhu võnkumise amplituudid palju väiksemad ja vool ajas peaaegu muutumatu.

Kui üksikus elastses veresoones rõhku suurendada, siis suureneb ka selle diameeter, mis võimaldab veresoones hoida suuremat hulka vedelikku ja seda hiljem, kui rõhk langeb, edasi kanda. Seetõttu saab veresoone elastset käitumist modelleerida, kui lisada meie algsele kirjeldusse kondensaator. Enamgi veel, vooluhulga ajalise sõltuvuse korral tuleb arvestada ka vedeliku inertsusel, mis on võrdeline vedeliku tihedusega  $\rho = 1.05 \times 10^3$  kg m<sup>-3</sup>. Inertsust saab meie mudelis esitada induktoriga. Joonisel 2 on esitatud üksiku veresoone ekvivalentne elektriskeem. Ekvivalentne mahtuvus ja induktiivsus avalduvad vastavalt kujul

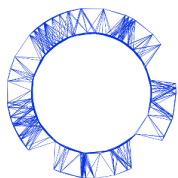
$$C = \frac{3\ell\pi r^3}{2Eh} \quad \text{ja} \quad L = \frac{9\ell\rho}{4\pi r^2}, \quad (2)$$

kus  $h$  on veresoone seina paksus ja  $E$  on arteri Youngi moodul (koefitsient, mis seob veresoone koe suuruse muutuse sellele avaldatava rõhuga). Youngi moodul on rõhu ühikutega ning selle väärtus arterioolide puhul on ligikaudu  $E = 0.06$  MPa.



Joonis 2. Üksiku veresoone ekvivalentne elektriskeem.

## Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-3

Estonian Estonian (Estonia)

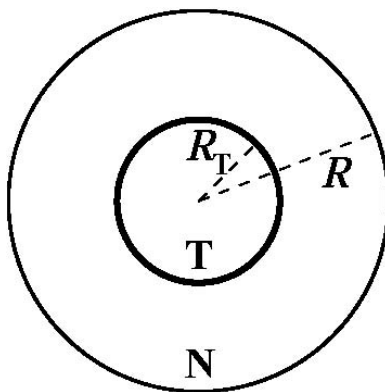
**A.3** Tuletage satsionaarses režiimis rõhu võnkumise amplituud  $P_{\text{out}}$  veresoone väljund-otsas funktsioonina rõhu võnkumise amplituudist  $P_{\text{in}}$  sisend-otsas, ekvivalenttakistusest  $R$ , induktiivsusest  $L$  ja mahtuvusest  $C$  voolu nurksageduse  $\omega$  jaoks. Leidke, milline tingimus peab olema rahuldatud suuruste  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $E$ ,  $h$ ,  $r$  ja  $\ell$  vahel selleks, et madalate sageduste korral ollaks rõhu võnkumise amplituud väljund-otsas väiksem kui  $P_{\text{in}}$ . 2.0pt

**A.4** Leidke punktis **A.2** kirjeldatud veresoonte võrgustiku jaoks maksimaalne arterioli seina paksus  $h$ , et punktis **A.3** leitud tingimus oleks rahuldatud. Eeldage, et seina paksus  $h$  on igal tasemel sama. 0.7pt

### Osa B. Kasvaja suurenemine (5,5 punkti)

Kasvaja arenemine on väga keerukas protsess, kus füüsikaga kombineeruvad bioloogilised mehhanismid nagu rakkude vohamine ja looduslik valik. Selles ülesandes vaatleme kasvaja suurenemise lihtsustatud mudelit, mis arvestab rõhu suurenemist, mis tavapäraselt esineb tahketes kasvajates.

Vaadeldgem normaalsete rakkude kogumikust moodustunud kudet, mida ümbritseb venimatu membraan. Seetõttu on kude sunnitud võtma muutumatu kuju: sfäär raadiusega  $R$  (Joonis 3).



Joonis 3. Lihtsustatud kasvaja.

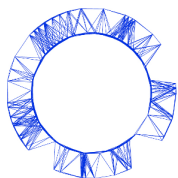
Algselt ei ole koes ülerõhku, st rõhk on igal pool võrdne atmosfäärirõhuga.

Alghetkel  $t = 0$  hakkab kasvaja arenema sfääri keskpunktist ja selle suurenedes kasvab ka rõhk koes. Kumbagi tüüpi kude, normaalne (N) ja kasvaja (T), on kokkusurutavad ja nende vastavad tihedused  $\rho_N$  ja  $\rho_T$  kasvavad lineaarselt rõhu kasvades:

$$\rho_N = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_N} \right), \quad \rho_T = \rho_0 \left( 1 + \frac{p}{K_T} \right), \quad (3)$$

kus  $\rho_0$  on puutumata koe tihedus,  $p$  on rõhu erinevus atmosfäärirõhust ja  $K_N$ ,  $K_T$  vastavalt normaalse ja kasvaja koe kokkusurutavusmoodulid. Üldkuhul on kasvaja kude normaalsest koest jäigem ja seega ka suurema kokkusurutavusmooduliga.

# Theory



IPhO 2018  
Lisbon, Portugal

# Q3-4

Estonian Estonian (Estonia)

- B.1** Normaalse rakkude mass ei muutu, samas kui kasvaja suureneb. Avaldage kasvaja ruumala ja kogu koe ruumala suhe  $v = V_T/V$  funktsioonina kasvaja massi ( $M_T$ ) ja normaalse koe massi ( $M_N$ ) suhtest  $\mu = M_T/M_N$  ning kokkusu-  
rutavusmoodulite suhtest  $\kappa = K_N/K_T$ . 1.0pt

Mõnikord kasutatakse kasvaja raviks koos kemoterapia ja radioterapiaga hüpertermiat. Hüpertermia meetodi puhul kuumutatakse selektiivselt kasvaja rakke keha normaaltemperatuurilt  $37^\circ\text{C}$  kõrgemate temperatuurideni üle  $43^\circ\text{C}$ , mis põhjustab kasvaja rakkude hävimise. Teadlased on arendamas süsinik-nanotorusid, mis on kaetud spetsiaalsete valkudega, mis on võimelised kasvaja rakkude külge haakuma. Kudet infrapunakiirgusega kiiritades neelavad nanotorud oluliselt rohkem kiirgust võrreldes ümbritseva koega ja niiviisi on võimalik kasvaja rakke (kuhu on kinnitunud nanotorud) selektiivselt kuumutada.

Eeldagem, et kasvaja, normaalsed rakud ja ka ümbritsev kude on ühesuguse konstantse soojusjuhtivusteguriga  $k$ . See tähendab, et antud ülesande geometria puhul on mingi raadiusega  $r$  sfääri pinda läbiva energiavoog ajaühikus pindalaühiku kohta avaldatav kui  $k$  korda temperatuuri tuletis  $r$  järgi. Nanotorud on kasvaja ruumalas ühtlaselt jaotunud ja annavad edasi soojusenergiat võimsusega  $\mathcal{P}$  ruumalaühiku kohta. Eeldagem, et kasvajast väga kaugel on temperatuur võrdne inimese normaalse kehatemperatuuriga.

- B.2** Leidke statsionaarsel juhul temperatuur kasvaja keskel funktsioonina suurus-  
test  $\mathcal{P}$ ,  $k$ , inimese kehatemperatuurist ja kasvaja raadiusest  $R_T$ . 1.7pt

- B.3** Leidke minimaalne võimsus ruumalaühiku kohta  $\mathcal{P}_{\min}$ , mis on vajalik kuni  $5.0\text{ cm}$   
raadiuses kõigi vähi rakkude temperatuuri tõstmiseks kõrgemale kui  $43.0^\circ\text{C}$ .  
Koe soojusjuhtivusteguriks võtke  $k = 0.60\text{ W K}^{-1}\text{m}^{-1}$ . 0.5pt

Eeldagem, et kasvajat läbib sarnane hargnev veresoonte võrgustik, nagu vaatlesime alamülesandes **A.1**. Kasvaja suurenedes, juhul kui selle rõhk  $p$  ületab väikseimate veresoonte rõhku  $P_{\text{cap}}$ , väheneb seetõttu nende veresoonte raadius väikse muudu  $\delta r$  võrra. Kui rõhk jõuab teatud kriitilise väärtuseni  $p_c$  (mis vastab raadiuse muudule  $\delta r_c$ ), surutakse väikseimate veresoonte seinad kokku ja see takistab oluliselt vereringet kasvajas. Rõhk ja raadiuse muut on seotud järgneva võrrandiga:

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left( \frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left( 2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}. \quad (4)$$

Eeldagem, kasvaja rõhu kasvades muutub raadius vaid väikseimatel veresoontel (tasemel  $N - 1$ ).

- B.4** Vaadeldagem lineaarset režiimi, kus  $p - P_{\text{cap}}$  on väga väike. Avaldage sel juhul  
vooluhulga suhteline vähenemine  $\frac{\delta Q_{N-1}}{Q_{N-1}}$  neis väikseimates veresoontes funktsioonina kasvaja ruumala suhtest  $v = V_T/V$  ja suurustest  $K_N$ ,  $N$ ,  $p_c$ ,  $\delta r_c$ ,  $r_{N-1}$ ,  
 $P_{\text{cap}}$ . 2.3pt