

## Üldised konstandid

Valguse kiirus vaakumis	$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Vaakumi magnetiline läbitavus	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$
Vaakumi elektriline läbitavus	$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$
Elementaarlaeng	$e = 1.602\,176\,620\,8(98) \times 10^{-19} \text{ A} \cdot \text{s}$
Elektroni mass	$m_e = 9.109\,383\,56(11) \times 10^{-31} \text{ kg}$ $= 0.510\,998\,946\,1(31) \text{ MeV}/c^2$
Prootoni mass	$m_p = 1.672\,621\,898(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 938.272\,081\,3(58) \text{ MeV}/c^2$
Neutroni mass	$m_n = 1.674\,927\,471(21) \times 10^{-27} \text{ kg}$ $= 939.565\,413\,3(58) \text{ MeV}/c^2$
Aatommassiühik	$u = 1.660\,539\,040(20) \times 10^{-27} \text{ kg}$
Rydbergi konstant	$R_\infty = 10\,973\,731.568\,508(65) \text{ m}^{-1}$
Gravitatsioonikonstant	$G = 6.674\,08(31) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Gravitatsioonikiirendus Maal	$g = 9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Plancki konstant	$h = 6.626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Avogadro arv	$N_A = 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Molaarne gaasikonstant	$R = 8.314\,4598(48) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Molaarmassi konstant	$M_u = 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$
Boltzmanni konstant	$k_B = 1.380\,548\,52(79) \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmanni konstant	$\sigma = 5.670\,367(13) \times 10^{-8} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$

## Tumeaine

Esimene teaduslik järeldus tumeaine olemasolust põhineb Coma galaktikaparve dünaamika vaatlustel. Coma galaktikaparv koosneb umbes tuhandest galaktikast. Viriali teoreemi abil saab hinnata galaktikaparve massi. Virial teoreem annab seose mitmest üksteisega interaktsiooniga seotud osakesest koosneva süsteemi ajaliselt keskmistatud summaarse potentsiaalse ja summaarse kineetilise energia vahel. Kõige lihtsama näitena: ringorbiidil liikuva planeedi kineetiline ja potentsiaalne energia on omavahel seotud.

Aastal 1933 hindas Fritz Zwicky oma vaatluste põhjal, et Coma galaktikaparve kogumass on suurem kui galaktikaparves nähtavate galaktikate mass kokku. Ainult nähtavate galaktikate gravitatsiooniline tõmme oli liiga väike, et seletada mõõdetud galaktikate kiiruseid. Seetõttu peab lisaks nähtavale massile (galaktikad) olema galaktikaparves veel nähtamatut massi, et seletada nii suuri galaktikate kiirusi. See peidetud mass on tumeaine. Järgnevas eeldage, et iga galaktika mass on summa tavalise aine ja tumeaine, mis liigub selle galaktikaga kaasa, masside summa.

### A. Galaktikaparv

Vaatlame galaktikaparve mis koosneb suurest arvust  $N$  galaktikast ja tumeainest, mis paiknevad homogeenselt sfääris raadiusega  $R$ . Galaktikaparve kogumass koos tumeainega on  $M$ . Eeldage, et keskmine galaktika mass koos temaga kaasa liikuva tumeainega on  $m$ .

A.1	Eeldades massi ühtlast jaotust parves, leidke parve potentsiaalne energia. Avaldage see $M$ ja $R$ -i kaudu.	1.0 pt.
-----	--	---------

Universumi paisumise tõttu liiguvad kõik kauged objektid meist eemale kiirustega, mis on seda suuremad, mida kaugemal objektid meist on. Teatud Lymani sageduse (vesiniku kiirgusspektri joon) mõõtmised teatud galaktikaparves asuvatest IA tüüpi supernoovadest, millest igaüks asub täpsemalt  $i$ -ndas galaktikas, annavad tulemuseks vastavalt  $f_i$ , kus  $i = 1, \dots, N$ . Sama Lymani sageduse laboris mõõdetud väärtus on  $f_0$ .

A.2	Avaldage keskmine kiirus $V_{cr}$ , millega terve galaktikaparv Maast eemaldub, kasutades suurusi $f_i$ (kus $i = 1, \dots, N$ ), $f_0$ ja $N$ -i. Eeldage, et galaktikate kiirus on oluliselt väiksem kui valguse kiirus $c$ .	0.5 pt.
-----	---	---------

A.3	Eeldage, et galaktikate kiirused parve keskme suhtes on isotroopselt jaotunud (igas suunas sama palju). Avaldage galaktikate ruutkeskmine (ruutude keskmiste ruutjuut) kiirus parve keskme suhtes $v_{rms}$ . Avaldage see $N$ , $f_i$ (kus $i = 1, \dots, N$ ) ja $f_0$ kaudu. Avaldage selle tulemuse põhjal ühe galaktika keskmine kineetiline energia parve keskpunkti taustsüsteemis suuruste $v_{rms}$ ja $m$ kaudu.	1.5 pt.
-----	--	---------

Viriali teoreemi saame kasutada parve kogumassi leidmiseks. Teoreem ütleb, et osakeste süsteemi jaoks, mis on omavahel seotud konservatiivse jõuga, kehtib

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t,$$

kus  $\langle K \rangle_t$  on ajas keskmistatud kineetiline energia,  $\langle U \rangle_t$  ajas keskmistatud potentsiaalne energia ja  $\gamma$  konstant. Seda teoreemi saame tõestada, kui eeldame, et osakeste süsteemis, kus osakesed on omavahel interaktsiooniga seotud, on osakeste kiirused ja kordinaadid alati lõplikud ja seega on ka suurus

$$\Gamma = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i$$

lõplik.

A.4	Kasutades fakti, et üle pika aja keskmistatud $d\Gamma/dt$ muutub nulliks, $\langle \frac{d\Gamma}{dt} \rangle_t = 0$ , leidke gravitatsioonilise interaktsiooni korral teguri $\gamma$ väärtus ( $\gamma$ on tegur Viriali teoreemis). (Vihje: proovige lahendada, võttes suurus $\Gamma$ sisalduv summa üle väikse arvu galaktikate).	1.7 pt.
-----	---	---------

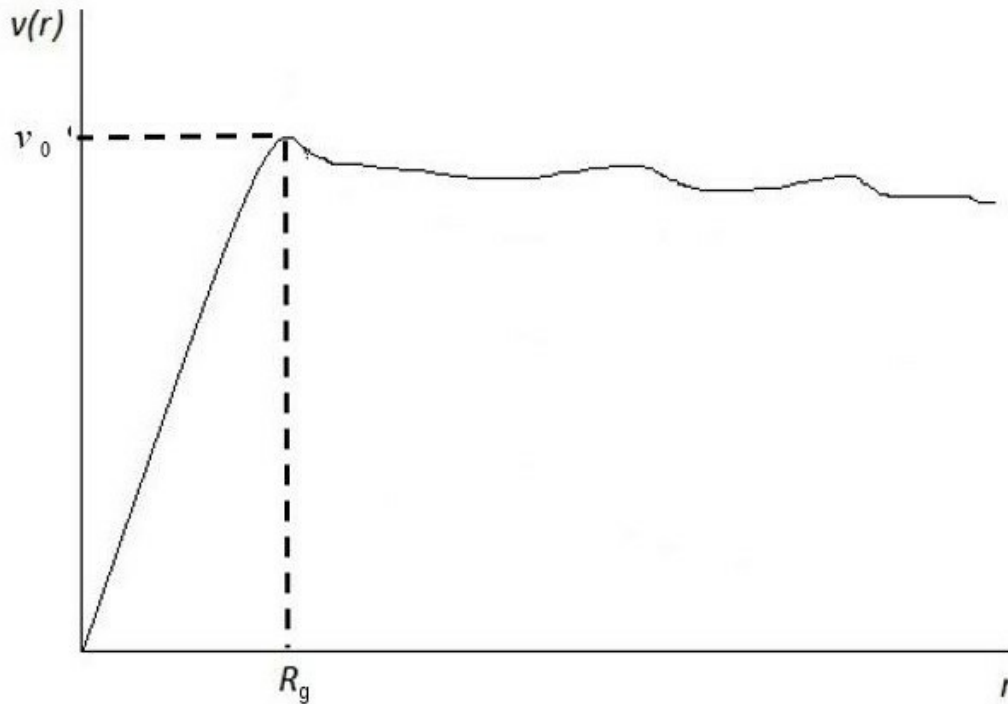
A.5	Avaldage eelnevate tulemuste põhjal tumeaine kogumass galaktikaparves suuruste $N$ , $m_g$ , $R$ ja $v_{rms}$ kaudu, kus $m_g$ on tavalise (st nähtava) aine mass ühes keskmises galaktikas. Pange tähele, et tumeaine ruutkeskmine kiirus on sama mis galaktikatel.	0.5 pt.
-----	--	---------

## B. Tumeaine galaktikas

Tumeainet leidub galaktikate sees ja ümber. Vaatleme sfäärilist galaktikat mille raadius on  $R_g$  (väljaspool seda raadiust on ainult mõned üksikud tähed). Eeldage, et tähed galaktikas on punktmassid keskmise massiga  $m_s$ . Eeldage, et tähed galaktikas on jaotunud ühtlaselt arvutihedusega  $n$  ja liiguvad ringorbiitidel.

B.1	Eeldades, et galaktika koosneb ainult tähtedest, avaldage tähe kiirus $v(r)$ funktsioonina tähe kaugusest galaktika keskmest. Visandage $v(r)$ graafik vahemikes $r < R_g$ ja $r \geq R_g$ .	0.8 pt.
-----	--	---------

Tumeaine olemasolu saab järeldada graafiku põhjal, mis kirjeldab tähtede tiirlemist galaktikas. See on vaatluste põhjal saadud  $v(r)$  graafik. Alloleval joonisel on tüüpiline  $v(r)$  graafik. Lihtsuse mõttes eeldage, et  $v(r)$  on lineaarne piirkonnas  $r \leq R_g$  ja konstant  $v_0$  piirkonnas  $r > R_g$ .



**Joon. 1** Galaktika tähtede tiirlemist kirjeldav graafik.

B.2	Leidke selle osa galaktika kogumass $m_R$ , mis asub sfääris raadiusega $R_g$ , kasutades muutujaid $v_0, R_g$ .	0.5 pt.
-----	--	---------

Erinevus osa B.2 graafiku ja osas B.1 leitud graafiku vahel näitab tumeaine olemasolu.

B.3	Avaldage tumeaine tihedus suuruste $r, R_g, v_0, n$ , ja $m_s$ kaudu piirkonnas $r < R_g$ ja piirkonnas $r \geq R_g$ .	1.5 pt.
-----	--	---------

## C. Tähtedevaheline gaas ja tumeaine

Vaatleme järgnevalt noort galaktikat, mille kogumassi annavad peamise panuse tähtedevaheline gaas ja

tumeaine (ignoreerige tähtede massi). Eeldame, et tähtedevaheline gaas koosneb identsetest osakestest massiga  $m_p$ . Gaasi osakeste arvtihedus  $n(r)$  ja temperatuur  $T(r)$  sõltuvad kaugusest  $r$  galaktika keskmest. Samuti võime eeldada, et gaas on hüdrostaatilises tasakaalus, st gaasi rõhk tasakaalustab galaktika gravitatsioonilise tõmbe.

C.1	Avaldage gaasi rõhu gradient $dP/dr$ , kasutades suurusi $m'(r)$ , $r$ ja $n(r)$ . Suurus $m'(r)$ tähistab galaktika keskel mõttelise sfääri, raadiusega $r$ , sisse jääva gaasi ja tumeaine kogumassi.	0.5 pt.
-----	---	---------

C.2	Eeldades, et tähtede vaheline gaas on ideaalne gaas, avaldage $m'(r)$ suuruste $n(r)$ , $T(r)$ ja nende ( $r$ -i järgi võetud) tuletiste kaudu.	0.5 pt.
-----	---	---------

Järgnevas eeldame lihtsuse huvides, et gaas on konstantse temperatuuriga  $T_0$  ja gaasi osakeste arvtihedus on antud avaldisega

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2},$$

kus  $\alpha$  ja  $\beta$  on konstandid.

C.3	Leidke tumeaine tihedus galaktikas funktsioonina $r$ -ist.	1.0 pt.
-----	--	---------

## Maavärin, vulkaan ja tsunaami

Indoneesias on toimunud mitmeid looduskatastroofe: vulkaanipurskeid, maavärinaid, tsunaamisid.

### A. Merapi vulkaanipurse



**Joon. 1:** Merapi vulkaanipurse tuhapilv. Foto: Yogyakarta vulkanoloogiaamet, BPPTKG.

Yogyakarta asuv Merapi vulkaan on Jaava saare üks kõige aktiivsemaid vulkaane. Vulkaanipurse ajal väljub vulkaanist kuum gaasi ja kivide segu.

26. oktoobril 2010 toimus Merapi vulkaani plahvatuslik purskamine, kus õhku paiskunud tuhapilv tõusis 12 km kõrgusele (vt Joon. 1) ning kuum gaasi ja kivide segu sundis 20 000 inimest oma kodudest lahkuma.

---

Järgnevas vaatleme 2010. aastal toimunud võimsa Merapi vulkaanipurse põhjust. Geofüüsikast on teada, et kui toimub välise vee sissevool magmasse, võib see viia plahvatusliku vulkaanipurskeni (hüdromagmaatilised pursked). Vaatleme vulkaanisüsteemi mudelina magma ja vee segu. Süsteem on väliselt piiratud volukanalite ja atmosfääriga. Plahvatuslik vulkaanipurse toimub kahes etapis: (1) magma ja vee kiire (hetkeline) segunemine ja (2) süsteemi paisumine. Esimeses etapis segunevad magma massiga  $m_m$  ja temperatuuriga  $T_m$  (mõõdetud absoluutskaalas) ning väljast sissevoolanud vesi massiga  $m_w$  ja temperatuuriga  $T_w$  (mõõdetud absoluutskaalas). Arvestagem, et soojuslik tasakaal tekib peaaegu hetkeliselt ning seejuures süsteemi ruumala praktiliselt ei muutu. Vee aurustumissoojusega ning magma sulamissoojusega mitte arvestada.

A.1	Avaldage süsteemi tasakaaluline temperatuur pärast esimest etappi. Avaldage see masside ning vee ja magma erisoojuste $C_{Vw}$ ja $C_{Vm}$ kaudu.	0.4 pt.
A.2	Avaldage süsteemi tasakaaluline rõhk pärast esimest etappi, eeldades, et aurustunud segu käitub ideaalse gaasina, mille molaarruumala (ruumala ühe mooli kohta) on $v_e$ .	0.3 pt.

Süsteemi paisumine (teine etapp) võib toimuda mitmel viisil, millest üks on nn termiline plahvatus. Kuigi tegemist on keerulise protsessiga, võime siiski suurusjärguliselt hinnata väljapurskunud materjali väljumiskiirust. Gaasi väljumiskiirus purkse ajal sõltub rõhust  $p$  ning segu kogumassist  $m$  ja koguruumalast  $V$  vulkaani sees.

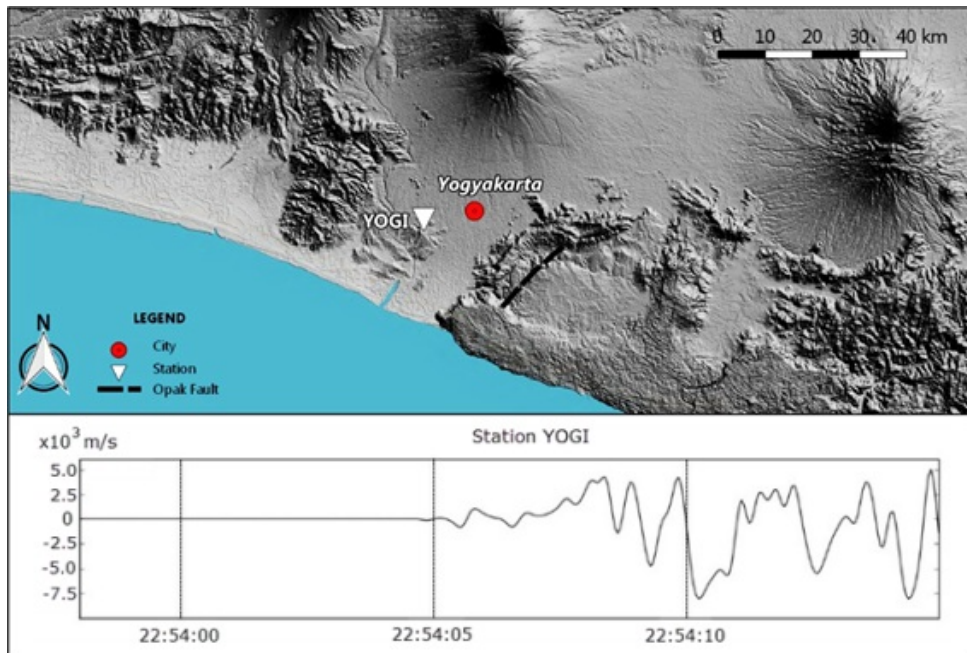
A.3	Hinnake väljapurskunud gaasi kiirust parameetrite $p$ , $m$ ja $V$ kaudu, pööramata tähelepanu arvulise teguri $\kappa$ väärtusele.	0.3 pt.
-----	---	---------

Vulkaanis on purkse ajal rõhud suurusjärgus 100 MPa, seetõttu võivad vulkaanipurske väljumiskiirused läheneda ballistilistele kiirustele.

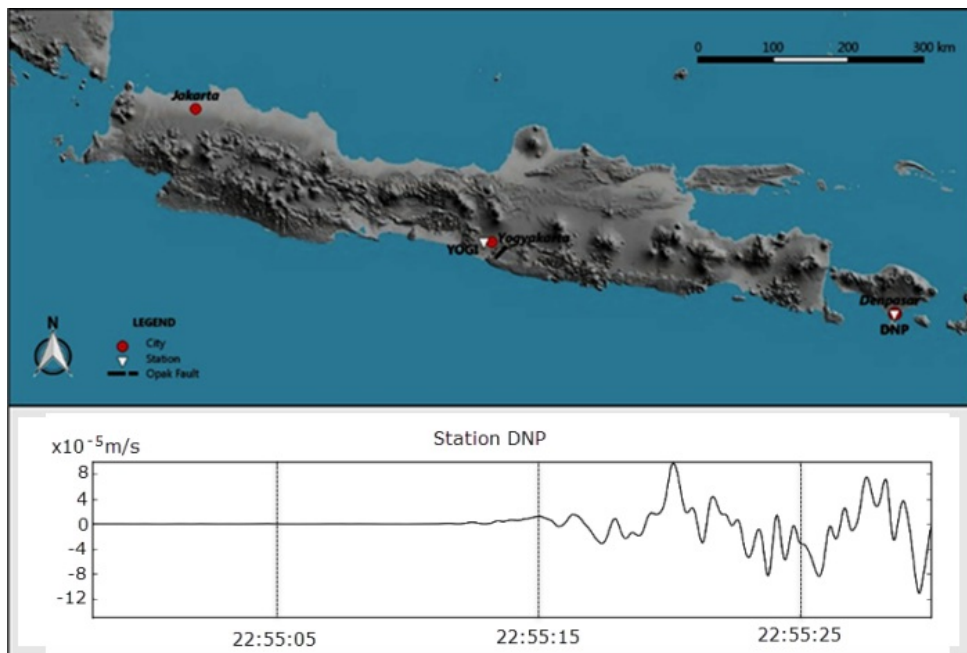
## B. Yogyakarta maavärin

Yogyakarta 2006. aasta maavärin magnituudiga  $M_w = 6.4$  toimus kell 05:54:00.00 kohaliku aja järgi (ehk 22:54:00.00 UTC). See purustas palju maju Bantuli ja Yogyakarta piirkonnas. Maavärina põhjustas hetkeline maapinna nihe Opaki nihkejoonel (vt Joon. 2). Hüpostsenter asus 15 km sügavusel maa all.

Maakoos levivad seismilisi laineid saab salvestada seismomeetriga, millega mõõdetud graafikut nimetatakse seismogrammiks (vt Joon. 2 ja 3, alumised graafikud). Neil kahel seismogrammil on esitatud maapinna vertikaalkiirus funktsioonina ajast, mis on mõõdetud kahes mõõtejaamas: Yogyakarta (YOGI, Joon. 2) ja Denpasaris Bali saarel (DNP, Joon. 3). Üldiselt jagunevad seismilised lained kolme tüüpi laineteks: pikilained ehk primaarlained ( $P$ -lained), ristlained ehk sekundaarlained ( $S$ -lained) ja pinnalained. Kaks neist,  $P$ - ja  $S$ -lained, levivad maa sisemuses, kuid pinnalained saavad levida ainult maapinnal. Maa sisemuses levivad seismilised lained saavad liikuda kas sirgjoones, peegelduda kihtide piirpinnalt või murduda kihtide piirpinnal ühest kihist teise liikudes. Pikilained ( $P$ -lained) liiguvad kõige suurema kiirusega ning pinnalained liiguvad kõige väiksema kiirusega, mis on umbes 60%  $P$ -lainete kiirusest.



**Joon. 2:** YOGI mõõtejaama asukoht kaardil ja seismogramm.



**Joon. 3:** DNP mõõtejaama asukoht kaardil ja seismogramm.

Horisontaalkaugus epitsentrist (hüpotsentri maapinnale projitseeritud punkt) nende kahe mõõtejaamani (YOGI ja DNP) on vastavalt 22.5 km ja 500 km. Maakoore paksus Jaava saare kohal Indoneesias on 30 km. Maakoore all asub vahevöö kiht. Nagu muudki lainenähtused, käituvad ka seismilised lained optikast tuntud murdumispeaduse kohaselt. Samuti võivad seismilised lained peegelduda vahevöö ja maakoore eralduspinnalt. Selles üleandes ei ole maapinna kumerusega vaja arvestada.

B.1	Joonisel 2 on esitatud YOGI mõõtejaamas salvestatud seismogramm. Arvutage ülesandes esitatud andmete põhjal $P$ -lainete levimise kiirus maakooses.	0.5 pt.
B.2	Arvutage DNP mõõtejaama jõudnud lainete liikumisajad kahe $P$ -laine jaoks: üks, mis liikus otsejoones, ning teine, mis liikus peegeldumisega.	0.6 pt.

Eeldame lihtsustavalt, et Maa koosneb kahest kihist: maakoorest ja vahevööst. Primaar- ehk  $P$ -lained levivad maakooses ja vahevöös erinevate konstantsete kiirustega.  $P$ -laine levimiskiirus vahevöös on suurem kui maakooses. NB! Pange tähele, et vahevöösse täisnurgaga (st horisontaalseks) murdunud  $P$ -laine murdub osaliselt maakoore tagasi igast selle levemistrajektoori punktist piki maakoore ja vahevöö piiri.

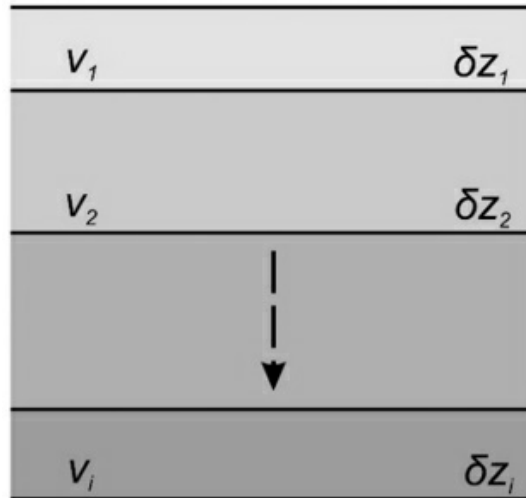
B.3	Arvutage $P$ -laine levimiskiirus vahevöös.	1.2 pt.
-----	---	---------

Et kirjeldada Maa struktuuri tõelähedasemalt, jagame maakoore õhukesteks kihtideks, nii et seismilise laine kiirus on funktsioon sügavusest  $z$  kujul  $v(z) = v_0 + az$ , kus  $a$  on konstant. Eeldame järgnevas, et hüpotsenter asub maapinna lähisel. Selle mudeli kohaselt liigub laine mööda kõverjoonelist trajektoori.

B.4	Defineerime kiireparameetri $p = \sin\theta(z)/v(z)$ , kus $\theta(z)$ on kiire levimissuuna ja vertikaali vaheline nurk. Eeldagem, et seismiline laine jõuab mõõtejaama kiireparameetriga $p$ ning hüpotsenter asub väga lähedal maapinnale. Avaldage hüpotsentri ja mõõtejaama vaheline kaugus suuruste $p$ , $v_0$ ja $a$ kaudu.	1.4 pt.
B.5	Avaldage laine levimise aeg $T$ hüpotsentrist mõõtejaamani (avaldise kujuks on integraal üle sügavuse $z$ ).	1.0 pt.

Vaatleme Maad koosnevana homogeensetest kihtidest paksustega  $\delta z_i$ , kus laine levimise kiirus igas vastavas kihis on  $v_i$ .

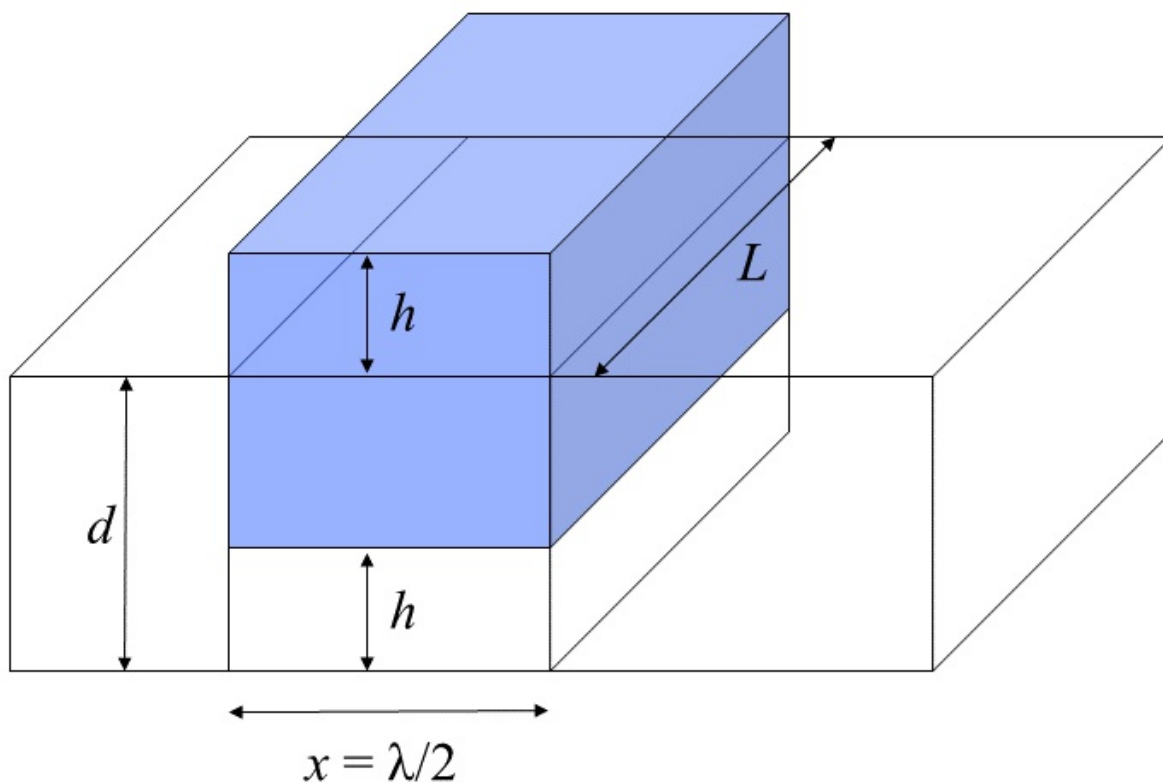
B.6	Kasutades eelneva alaküsimuse tulemust, arvutage ligikaudselt laine levimise aeg ( $T$ ) epitsentrist DNP mõõtejaamani, eeldades, et maakoor koosneb ainult kolmest ( $i = 1, 2, 3$ ) diskreetsest kihist, mida kirjeldavad parameetrid: $v_1 = 6.65$ km/sec, $v_2 = 6.97$ km/sec, $v_3 = 6.99$ km/sec, $p = 0.143$ sec/km, $\delta z_1 = 6.0$ km, $\delta z_2 = 9.0$ km, $\delta z_3 = 15$ km.	1.0 pt.
-----	---	---------



Joon. 4: Maa kihtide lihtsustatud mudel.

### C. Jaava tsunaami

Pangandarani maavärin, mis tekitas ka tsunaami, toimus 17. juulil 2006 kell 15:19:27 kohaliku aja järgi Jaava saare lääneosa ranniku lähedal ookeanis. Kui maavärina epitsenter on nihkejoonel ookeani põhjas, võib maavärinaga kaasnev maakoore nihe tekitada hiigelsuure laine ehk tsunaami. Teisisõnu, tsunaami on nõ madala-vee laine, mis tekib väikse amplituudiga, kuid millel on väga suur lainepikkus. Vaatleme hetkelist maakoore nihet, mis põhjustab teatud piirkonnas ookeani põhja üles tõusmise nagu näidatud Joonisel 5. Eeldagem, et maavärina energia muundub üles tõstetud ookeanivee potentsiaalseks energiaks. Lihtsustava mudelina lähendame üles tõstetud vett risttahukaga põhjapindalaga  $\lambda L/2$  (kus  $L \gg \lambda$ ), mis on kergitatud kõrguse  $h$  võrra.



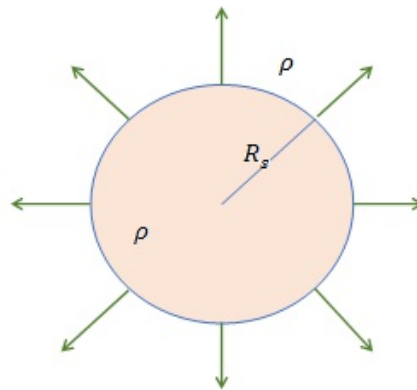
**Joon. 5:** Tsunaami tekkimise illustratsioon. Ookeani sügavus on  $d$ .

C.1	Avaldage maavärina tõttu üles tõstetud ookeanivee potentsiaalne energia ookeani pinna suhtes. Ookeanivee tihedus on $\rho$ .	0.4 pt.
C.2	Leidke tsunaamilaine kiiruse avaldis (dimensioonitu teguri täpsusega).	1.2 pt.
C.3	Kasutades energiakaalutlusi, avaldage tsunaamilaine amplituud funktsioonina ookeanisügavusest. Eeldage, et ookeanisügavus muutub piirkonniti aeglaselt ning algsügavusel $d_0$ oli tsunaamilaine amplituud $A_0$ .	1.3 pt.

## Kosmoloogiline inflatsioon

Galaktikate suhtelise liikumise tõttu on Maalt vaadeldes iga konkreetse galaktika spektrijoonte lainepikkused võrreldes algse lainepikkusega veidi nihkunud (Doppleri efekt). Suurt hulka galaktikaid vaadeldes võiksime eeldada, et lainepikkuste nihked on juhuslikud: mõned positiivsed (punanihe), mõned negatiivsed (sininihe). Tegelikult vaatlustest ilmneb siiski kõigi (v.a. mõned lähedasemad) galaktikate punanihe. See vaatlustulemus peab kehtima ka igast muust Universumi punktist vaadeldes. Siit saab järeldada, et Universum peab paisuma. Suurematel mastaapidel kui 100 Mpc, kus  $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ valgusaastat}$ , võib Universumi ebaregulaarsusega mitte arvestada, sest keskmistades üle suurte mastaapide, muutub universumi kärjeline struktuur üha isotroopsemaks (suunast sõltumatu) ja homogensemaks (asukohast sõltumatu). Seetõttu võime vaadelda Universumi kui ainet, millel on massitihedus  $\rho$  ja mis paisub.

### A. Universumi paisumine



Paisuva universumi lihtsa mudelina vaatleme koos keskkonnaga paisuvat sfääri. Sfääris ja sellest väljaspool on aine kõikjal sama tihedusega. Alghetkel on sfääri raadius  $R_s$ . Sfääri raadius muutub ajas:  $R(t) = a(t)R_s$ , kus  $a(t)$  on paisumitegur.

Kasutades Newtoni gravitatsiooniseadust sfääri välispinnal oleva massielemendi kiiruse jaoks avaldise leidmiseks, saame leida ühe võrrandi Friedmanni valemist:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = A_1 \rho(t) - \frac{kc^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

kus  $k$  on dimensioonitu konstant ja  $c$  valguse kiirus.

A.1	Määrake konstant $A_1$ võrrandis (1).	1.0 pt.
-----	---------------------------------------	---------

Selle valemi tuletasime mitterelativistliku juhu jaoks, aga see kehtib ka relativistlikul juhul, kui tõlgendame suurust  $\rho(t)c^2$  kogu energiatihedusena (va gravitatsiooniline potentsiaalne energia). Selle relativistliku süsteemi jaoks saab tuletada teise Friedmanni võrrandi

$$\dot{\rho} + A_2 \left( \rho + \left( \frac{p}{c^2} \right) \right) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

kasutades termodünaamika esimest seadust ja lugedes protsessi adiabaatiliseks. Suurus  $p$  on sfäärile mõjuv rõhk.

A.2	Leidke konstant $A_2$ võrrandis (2).	0.7 pt.
-----	--------------------------------------	---------

Selleks, et lahendada võrrandid (1) ja (2), tuleks eeldada, et kehtib seos  $p = p(\rho)$  kujul  $p(t)/c^2 = w\rho(t)$ , kus  $w$  on konstant. Suhet  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  nimetatame Hubble'i parameetriks. Universumi praegusel ajahetkel kehtivaid parameetrite väärtusi tähistatakse alaindeksiga 0, nt  $t_0, \rho_0, H_0, a_0$  jne. Lihtsuse huvides võtame  $a_0 = 1$ .

Arvatakse, et universum sai alguse Suurest Paugust, mis tekitas hulgaliselt relativistlikke osakesi. Paisumise käigus universum jahtub ja osakesed muutuvad mitterelativistlikeks. Hiljutised vaatlused täpsustavad, et tänapäeval on universumi paisumine domineeritud kosmoloogilise konstandi poolt, mis on oma olemuselt energiatihedus. Paisuv universum põhjustab footoni lainepikkuse suurenemist proportsionaalselt paisumisteguriga.

A.3	Leidke $w$ väärtus kõikidel järgnevatel juhtudel: (i) universum, mis koosneb ainult kiirgusest (st. footonite energia), (ii) universum, mis koosneb ainult mitterelativistlikust aineist ja (iii) universum, milles on konstante energiatihedus.	0.9 pt.
-----	--	---------

A.4	Leidke $a(t)$ iga osas A.3 vaadeldud juhu (i-iii) jaoks tingimusel, et $k = 0$ . Juhtudel (i) ja (ii) kasutage algtingimust $a(t = 0) = 0$ ja juhu (iii) korral tingimust $a_0 = 1$ .	0.9 pt.
-----	---	---------

Konstant  $k$  võrrandis (1) viitab universumi geomeetria tüübile. Kui  $k = +1$ , siis on universum positiivse kõverusega (suletud), kui  $k = 0$ , siis on universum lame (lõpmatu), ja kui  $k = -1$ , siis on universum negatiivse kõverusega (lahtine, lõpmatu). Defineerime tiheduste suhte  $\Omega = \rho/\rho_c$ , kus  $\rho_c c^2 = H^2/A_1$  on

kriitiline tihedus. Pange tähele, et  $A_1$  on leitud osas A.1.

A.5	Avaldage $k$ võrrandis (1) suuruste $\Omega$ , $H$ , $a$ ja $R_0$ kaudu.	0.1 pt.
-----	--	---------

A.6	Leidke igale $k = +1$ , $k = 0$ ja $k = -1$ väärtusele vastav $\Omega$ vahemik.	0.3 pt.
-----	---	---------

## B. Põhjused inflatsioonilise staadiumi sisseviimiseks ja üldised tingimused

Kosmilise mikrolaine taustkiirguse (CMB) vaatlused näitavad, et meie praegu universum on ligikaudu lame. Probleem on selles, et kui see on tõsi, siis praegune universum oleks pidanud ka arenema rangelt lamedast varasest universumist. Vastasel korral pidanuks iga kõrvalekalle algsest lamedusest aja jooksul üha kasvama ja rikkuma praeguse lameduse.

B.1	Avaldage $(\Omega(t) - 1)$ funktsioonina ajast olukorras, kus universum on kas kiirguse või aine poolt domineeritud staadiumis (kasuta ka A.3 tulemusi).	0.4 pt.
-----	--	---------

Probleemi lahendamiseks peame eeldama, et mingis oma varase arengu etapis pidanuks Universum läbima energiatiheduse poolt domineeritud staadiumi, mis viiks eksponentsiaalse paisumiseni. Seda nimetatakse inflatsioonilise paisumise staadiumiks.

B.2	Avaldage $(\Omega(t) - 1)$ funktsioonina ajast selles konstantse energiatiheduse poolt domineeritud staadiumis. Eeldage, et $(\Omega(t) - 1) \ll 1$ .	0.3 pt.
-----	---	---------

B.3	Näidake, et inflatsiooni toimumise korral hakkavad kehtima teatud võrratused: rõhk on negatiivne, paisumine kiireneb ( $\ddot{a} > 0$ ), Hubble'i raadius väheneb ( $d(aH)^{-1}/dt < 0$ ).	0.9 pt.
-----	--	---------

B.4	Näidake, et väheneva Hubble'i raadiuse tingimuse saab avaldada parameetri $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ kaudu tingimuseks $\epsilon < 1$ .	0.2 pt.
-----	--	---------

Inflatsioon toimub, kui  $\epsilon < 1$ , ja peatub, kui  $\epsilon = 1$ . Saame defineerida e-voltimiste arvu  $N$  nii, et  $dN = d \ln a = H dt$  ja inflatsiooni lõppedes  $N = 0$ .

## C. Ühtlaselt jaotunud aine poolt põhjustatud inflatsioon

Näide lihtsast füüsilisest süsteemist, mis saab tekitada inflatsioonilise staadiumi, on ühtlaselt jaotunud aine poolt domineeritud universum. Seda tüüpi ainet nimetatakse inflatoniks ja seda saab kirjeldada funktsiooniga  $\phi(t)$ .

Aine dünaamilise võrrandi saab avaldada kujul:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V', \quad (3)$$

kus  $V = V(\phi)$  on potentsiaali funktsioon ja  $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$ . Hubble'i parameeter rahuldab tingimust:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right], \quad (4)$$

kus konstant  $M_{pl}$  on taandatud Plancki mass. Inflatsiooniline staadium toimub, kui potentsiaalne energia  $V$  domineerib kineetilise energia  $\dot{\phi}^2/2$  üle piisavalt pika aja vältel, nii et liikmega  $\ddot{\phi}$  võrrandis (3) pole vaja arvestada. Seda tingimust nimetatakse 'slow-roll' lähenduseks.

Suurusi  $\epsilon$  ja  $\eta_V = \delta + \epsilon$ , kus  $\delta = -\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ , nimetatakse 'slow-roll' parameetriteks.

C.1	Hinnake parameetri $\epsilon$ , parameetri $\eta_V$ ja tuletise $dN/d\phi$ väärtusi, avaldades need potentsiaali $V(\phi)$ ja selle esimese ning teise tuletise ( $V'$ and $V''$ ) kaudu.	1.7 pt.
-----	---	---------

## D. Inflatsioon lihtsa potentsiaaliga

Igat inflatsioonimudelit peaks võrdlema CMB vaatlustest saadud piirangutega parameetritele  $n_s = 0.968 \pm 0.006$  ja  $r < 0.12$ , kus  $r = 16\epsilon$  ja  $n_s = 1 + 2\eta_V - 6\epsilon$  väärtus arvutatakse hetkel  $\phi = \phi_{start}$  inflatsioonimudeli jaoks, mis on aine poolt domineeritud. Eeldage, et aine potentsiaal on lihtsa kujuga  $V(\phi) = \Lambda^4 \left( \frac{\phi}{M_{pl}} \right)^n$ , kus  $n$  on suvaline täisarv ja  $\Lambda$  konstant.

D.1	Avaldage $\phi_{end}$ inflatsiooni lõpus.	0.5 pt.
D.2	Avaldage $r$ ja $n_s$ , kasutades suurusi e-voltimiste arv $N$ ja täisarv $n$ . Hinnake $n$ väärtust, mis annab kõige lähema tulemuse vaatlustest leitud $r$ ja $n_s$ väärtustele. Arvutustes kasutage väärtust $N = 60$ .	0.9 pt.