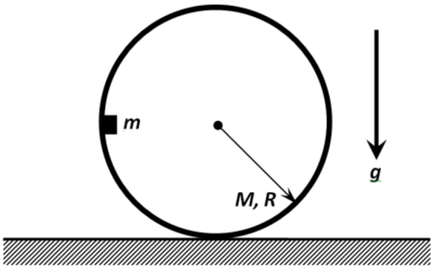
# Ülesanne 1 (9 punkti)

Ülesanne koosneb kolmest sõltumatust osast.

## Osa A (3 punkti)




Väike klots massiga $m$ on asetatud seest tühja, õhukese seinaga silindri sisepinnale. Silindri mass on $M$ ja raadius $R$. Alghetkel lebab silinder horisontaalsel pinnal ning klots asub pinnast kõrgusel $R$ nagu joonisel näidatud. Leidke klotsi ja silindri vahel mõjuv jõud $F$ hetkel, mil klots läbib oma liikumistrajektoori madalaimat punkti. Arvestage, et klotsi ja silindri sisepinna vahel hõõre puudub ning silinder liigub horisontaalsel pinnal ilma libisemata. Vabalangemise kiirendus on $g$.

## Osa B (3 punkti)

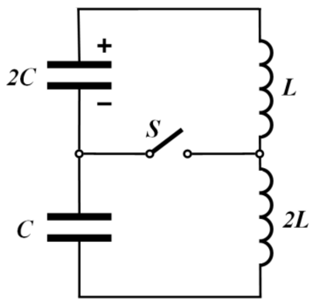
Mull raadiusega $r = 5.00$ cm on asetatud vaakumisse. Mulli sees on kahe-aatomiline ideaalne gaas ning mulli pinna moodustab kile paksusega $h = 10.0$ µm. Kile pindpinevustegur on $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ ja tihedus $\rho = 1.10\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

1) Leidke valem mullis oleva gaasi soojusmahtuvuse jaoks ühe mooli kohta niisuguses protsessis, kus gaasi soojendatakse aeglaselt nii, et mull jääb mehaanilisse tasakaalu. Arvutage selle valemi järgi soojusmahtuvus.
2) Leidke valem mulli väikeste radiaalsete võnkumiste sageduse $\omega$ jaoks ja arvutage selle väärtus. Eeldage, et kile soojusmahtuvus on palju suurem kui mullis oleva gaasi soojusmahtuvus. Eeldage, et mullis soojusliku tasakaalu saabumiseni kulub ühest võnkeperioodist palju vähem aega. Gaasi mass on palju väiksem kile massist.

Vihje: Laplace näitas, et tingituna vedeliku ja gaasi eralduspinna pindpinevusest, tekib sees- ja väljaspool kõverat pinda rõhkude vahe $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$.

## Osa C (3 punkti)

Alghetkel on lüliti $S$ avatud (lahti ühendatud) nagu joonisel näidatud, kondensaatoril mahtuvusega $2C$ on laeng $q_0$ ning kondensaator mahtuvusega $C$ on laadimata; poolides induktiivsustega $L$ ja $2L$ vool puudub. Järgnevalt hakkab kondensaator tühjenema ning hetkel, mil vool poolides saavutab maksimaalse väärtuse, suletakse (lühistatakse) lüliti $S$ hetkeliselt. Leidke, milline on edaspidi lülitit $S$ läbiva voolu maksimaalme väärtus $I_{\max}$.



# Ülesanne 2. Van der Waalsi gaasi olekuvõrrand (11 punkti)

Ideaalse gaasi mudelis, kus gaasi olekuvõrrandiks on ideaalse gaasi (Clapeyroni-Mendeleevi) võrrand, ei ole arvesse võetud kaht olulist füüsikalist nähtust. Esiteks, reaalse gaasi molekulidel on lõplik suurus, ning teiseks, molekulid interakteeruvad omavahel. Selle ülesande kõigis osades vaatleme *ainult ühte mooli vett.*

## Osa A. Mitte-ideaalse gaasi olekuvõrrand (2 punkti)

Kui võtame arvesse molekulide lõpliku suuruse, saab gaasi olekuvõrrandi panna kirja kujul

$$P(V-b)=RT, \tag{1}$$

kus $P, V, T$ on, vastavalt, gaasi rõhk, ruumala ja temperatuur, $R$ on universaalne gaasikonstant ning $b$ on eriline konstant, mis lahutab $V$-st mingi ruumala väärtuse.

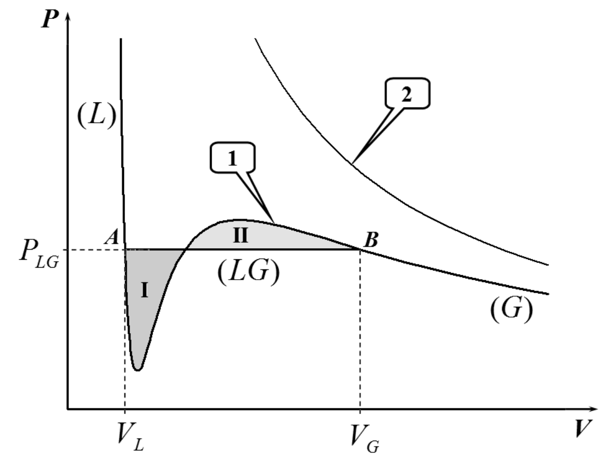
| | |
|---|---|
| A1 | Leidke suurusele $b$ hinnanguline valem molekulide diameetri $d$ kaudu. (0.3 punkti) |

Võttes arvesse molekulide omavahelisi interaktsioone, pakkus van der Waals välja järgneva võrrandi, mis kirjeldab nii aine gaasilist kui vedelat olekut:

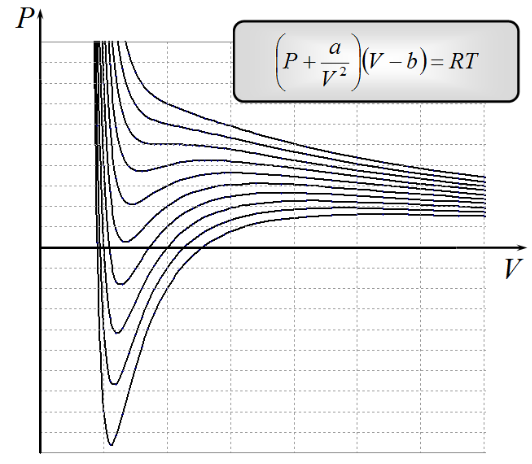
$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT, \tag{2}$$

kus $a$ on üks teine eriline konstant.

Teatud kriitilisest väärtusest $T_c$ madalamatele temperatuuridele $T$ vastav võrrandi (2) isoterm kujutab endast mitte-monotoonset kõverat, mida nimetatakse van der Waalsi isotermiks ning on Joonisel 1 tähistatud numbriga 1. Samal joonisel kõver 2 näitab ideaalse gaasi isotermi samal temperatuuril. Tegelik isoterm erineb van der Waalsi isotermist sirge lõigu $AB$ võrra, mida joonistatakse kindla konstantse rõhu $P_{LG}$ juures. See lõik asub ruumalade $V_L$ ja $V_G$ vahel, ning vastab gaasilises olekus (tähis $G$) ning vedelas olekus (tähis $L$) oleva aine tasakaalule. Teisest termodünaamika seadusest lähtudes tõestas J. Maxwell, et see rõhk $P_{LG}$ peab olema valitud nõnda, et pindalad *I* ja *II* oleksid Joonisel 1 võrdsed.




Joonis 1. Van der Waals'i isoterm gaasi/vedeliku jaoks (kõver 1) ning ideaalse gaasi isoterm (kõver 2).




Joonis 2. Mõned isotermid van der Waalsi gaasi olekuvõrrandi jaoks.

Temperatuuri tõustes kahaneb lõik $AB$ isotermil punktiks, kus temperatuur ja rõhk on, vastavalt, $T_c$ ja $P_{LG}=P_c$. Parameetreid $P_c$ ja $T_c$ nimetatakse kriitilisteks ning neid saab eksperimentaalselt suure täpsusega mõõta.

| | |
|---|---|
| A2 | Avaldage van der Waalsi konstandid $a$ ja $b$ suuruste $T_c$ ning $P_c$ kaudu. (1.3 punkti) |
| A3 | Vee jaoks $T_c = 647$ K ning $P_c = 2.2\cdot 10^7$ Pa. Arvutage $a_w$ ja $b_w$ vee jaoks. (0.2 punkti) |
| A4 | Hinnake veemolekulide diameetrit $d_w$. (0.2 punkti) |

## Osa B. Gaasi ja vedeliku omadused (6 punkti)

See ülesande osa käsitleb vee omadusi gaasilises ning vedelas olekus temperatuuril $T = 100\ °\mathrm{C}$. Küllastunud auru rõhk sellel temperatuuril on $p_{LG} = p_0 = 1.0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$, vee molaarmass on $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$.

### Gaasiline olek

Gaasilises olekus vee omaduste kirjeldamisel on mõistlik kasutada lähendust $V_G \gg b$.

| | |
|---|---|
| B1 | Tuletage valem gaasi ruumala $V_G$ jaoks ning avaldage see $R, T, p_0$, ja $a$ kaudu. (0.8 punkti) |

Peaaegu sama ruumala $V_{G0}$ saame ligikaudselt, kui kasutame ideaalse gaasi võrrandit.

| | |
|---|---|
| B2 | Arvutage protsentides välja gaasi ruumala suhteline muutus molekulidevaheliste jõudude tõttu, $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$. (0.3 punkti) |

Kui süsteemi ruumala langeb alla $V_G$, hakkab gaas kondenseeruma. Samas, hästi puhastatud gaas saab püsida mehaaniliselt metastabiilses olekus (nn. allajahutatud auruna) kuni selle ruumala langeb kindla väärtuseni $V_{G\min}$.

Allajahutatud gaasi mehaanilise stabiilse tingimuseks konstantsel temperatuuril on $\frac{dP}{dV} < 0$.

| | |
|---|---|
| **B3** | Leidke ning arvutage välja, kui mitu korda võib veeauru ruumala langeda, et aur ikka veel püsiks metastabiilses seisus. Teisisõnu, mis on $V_G / V_{G\min}$? (0.7 punkti) |

### Vedel olek

Vedelas olekus vee jaoks Van der Waals'i kirjelduses on mõislik kasutada lähendust $P \ll a/V^2$.

| | |
|---|---|
| B4 | Avaldage vedelas olekus vee ruumala $V_L$ suuruste $a, b, R$, ja $T$ kaudu (1 punkt). |

Eeldades, et $bRT \ll a$, määrake järgnevad vee omadused. *Ärge muretsege, kui mõned vastused ei klapi laialt tuntud tabeli-väärtustega!*

| | |
|---|---|
| B5 | Avaldage vedelas olekus vee tihedus $\rho_L$, kasutades mõnesid järgnevatest suurustest: $\mu, a, b, R$; ning leidke ka selle arvväärtus. (0.3 punkti) |
| B6 | Avaldage ruumpaisumistegur $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ suuruste $a, b, R$ kaudu, ning leidke ka selle arvväärtus. (0.6 punkti) |
| B7 | Avaldage vee aurustumissoojus $L$ ühe mooli kohta suuruste $\mu, a, b, R$ kaudu. Leidke ka selle arvväärtus. (1.1 punkti) |
| B8 | Vaadelge ühe aatomi paksust veekihti. Andke hinnang vee pindpinevustegurile $\sigma$. (1.2 punkti) |

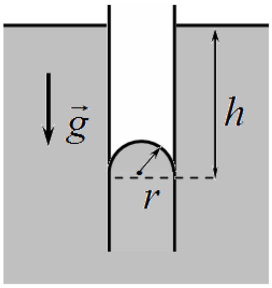
## Osa C. Vedeliku-gaasi süsteem (3 punkti)

Maxwelli reeglist (pindalad võrdsed, triviaalne integreerimine) ning van der Waalsi olekuvõrrandist, kasutades ka osas B tehtud lähendusi, saab näidata, et küllastunud auru rõhk $p_{LG}$ sõltub temperatuurist $T$ järgmiselt:

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}, \tag{3}$$

kus $A$ ja $B$ on konstandid, mida saab $a$ ja $b$ kaudu avaldada kujul $A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1$; $B = -\frac{a}{bR}$.

W. Thomson näitas, et küllastunud auru rõhk sõltub vedelikupinna kõverusest. Vaadelgem vedelikku, mis ei märga kapillaarimaterjali (kontaktnurgaks on 180°). Kui kapillaar pannakse vedelikku, siis langeb vedelik kapillaari sees pindpinevuse tõttu teatud tasemeni (vt. Joonist 3).



Joonis 3. Kapillaar mittemärgavas vedelikus.

| | |
|---|---|
| **C1** | Leidke väike muutus $\Delta p_T$ küllastunud auru rõhus vedeliku kõverdunud pinna kohal (võrreldes tasapinna kohal oleva auru rõhuga) ning avaldage see auru tiheduse $\rho_s$, vedeliku tiheduse $\rho_L$, pindpinevusteguri $\sigma$ ning pinna kõverusraadiuse $r$ kaudu. (1.3 punkti) |

Osas B3 vaadeldud metastabiilsed olekud leiavad laialt rakendust eksperimentides, nt. udukambris, mida kasutatakse elementaarosakeste vaatlusteks. Sellised olekud tulevad esile ka loodusnähtustes, nt. hommikuse udu tekkimine. Allajahutatud aur võib kondenseeruda vedeliku piiskadeks. Väga väiksed piisad aurustuvad kohe ära, kuid piisavalt suured piisad saavad kasvada.

| | |
|---|---|
| C2 | Oletage, et õhtul, temperatuuri $t_e = 20$ °C juures, oli veeaur õhus küllastunud, kuid hommikul välistemperatuur langes väikese suuruse $\Delta t = 5.0$ °C võrra. Oletades, et aururõhk polnud muutunud, hinnake kasvada võivate piiskade väikseimat raadiust. Kasutage vee pindpinevusteguri väärtust $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2}\ N/m$. (1.7 punkti) |

## Ülesanne 3. Gaaslahenduse lihtsaim mudel (10 punkti)

Gaasi läbivat elektrivoolu nimetatakse gaaslahenduseks, mida võib olla mitut tüüpi, näiteks hõõglahendus valgustuslampides, kaarlahendus keevitusel ja üldtuntud sädelahendus, mis avaldub näiteks välguna pilvede ja maa vahel.

### Osa A. Ennast-mitte-säilitav gaaslahendus (4.8 punkti)

Selles ülesande osas uurime ennast-mitte-säilitavat gaaslahendust. Selleks, et gaaslahendust alaliselt käigus hoida, on vaja välist ioniseerijat, mis tekitab ajaühikus ruumalaühiku kohta ühtlaselt paari kaupa $Z_{\mathrm{ext}}$ ühekordselt ioniseeritud iooni ja vaba elektroni.

Kui väline ioniseerija sisse lülitada, hakkab elektronide ja ioonide arv kasvama. Siiski ei saa elektronide ja ioonide arvtihedus piiramatult kasvada, seda piirab rekombinatsiooni protsess, kus vaba elektron ühineb iooniga nii, et tekib neutraalne aatom. Ajaühikus ruumalaühiku kohta toimuvate rekomibineerumis-sündmuste arv $Z_{\mathrm{rec}}$ esitub kui

$$Z_{\mathrm{rec}} = r n_e n_i,$$

kus konstant $r$ on rekombineerumistegur ning $n_e$ ja $n_i$ on vastavalt elektronide ja ioonide arvtihedus.

Arvestage, et väline ioniseerija lülitati sisse hetkel $t = 0$ ning elektronide ja ioonide arvtihedus gaasis oli sel hetkel null. Seejärel hakkab elektronide arvtihedus $n_e(t)$ kasvama ajas kui

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

kus $n_0, a$ ja $b$ on konstandid, ning $\tanh x$ tähistab hüperboolse tangensi funktsiooni.

| | |
|---|---|
| A1 | Leidke $n_0, a, b$ ning avaldage need kasutades suurusi $Z_{\mathrm{ext}}$ ja $r$. (1.8 punkti) |

Eeldage nüüd, et kasutada on kaks välist ioniseerijat. Kui ainult esimene ioniseerija on sisse lülitatud, kasvab elektronide arvtihedus tasakaalulise väärtuseni $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm}^{-3}$. Kui ainult teine ioniseerija on sisse lülitatud, kasvab elektronide arvtihedus tasakaalulise väärtuseni $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \mathrm{cm}^{-3}$.

| | |
|---|---|
| A2 | Leidke elektronide arvtiheduse $n_e$ tasakaaluline väärtus juhul, kui mõlemad ioniseerijad olid samaaegselt sisse lülitatud. (0.6 punkti) |

Tähelepanu! *Järgnevalt eeldame, et väline ioniseerija on olnud pikka aega sisse lülitatud nii, et kõik protsessid on muutunud statsionaarseks ega sõltu enam ajast. Ärge arvestage laengukandjate tekitatud elektriväljaga.*

Eeldage, et gaas täidab kahe paralleelse juhtiva plaadi vahelise ala. Plaatide pindala on $S$ ning nende vahekaugus $L \ll \sqrt{S}$. Plaatidele on rakendatud pinge $U$, mis tekitab plaatide vahel elektrivälja. Eeldage, et plaatide vahelisel alal jääb kumbagi tüüpi laengukandjate arvtihedus konstantseks.

Arvestage, et nii elektronid (tähistatud alaindeksiga $e$) kui ioonid (tähistatud alaindeksiga $i$) saavutavad elektriväljas $E$ sama kiiruse

$$v = \beta E,$$

kus $\beta$ on konstant, nn. laengu liikuvus.

| | |
|---|---|
| A3 | Avaldage vool $I$ gaasiga täidetud alas kasutades suurusi $U, b, L, S, Z_{\mathrm{ext}}, r$ ning $e$ – elementaarlaeng. (1.7 punkti) |
| A4 | Leidke gaasi eritakistus $\rho_{\mathrm{gas}}$ piisavalt väikeste rakendatud pinge väärtuste jaoks ning avaldage see kasutades suurusi $b, L, Z_{\mathrm{ext}}, r$ ja $e$ (0.7 punkti). |

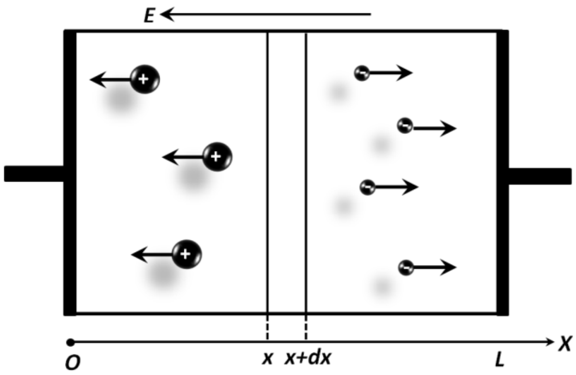
## Osa B. Ennast säilitav gaaslahendus (5.2 punkti)

Selles ülesande osas uurime ennast säilitava gaaslahenduse käivitamist: sellel juhul vool gaasiga täidetud alas ei kao.

Tähelepanu: *B-osas eeldame, et väline ioniseerija jätkab tööd sama $Z_{\text{ext}}$ väärtusega. Eirake laengukandjate tekitatud elektrivälja – s.t. elektriväli piki ala on homogeenne – ning ärge võtke arvesse rekombinatsiooni.*

Ennast säilitava gaaslahenduse puhul mängivad kaks seni vaatlemata jäänud protsessi tähtsat rolli. Esimeseks protsessiks on sekundaarne elektronide emissioon, ning teiseks on nn. elektronlaviin.

Sekundaarne elektronide emissioon toimub, kui ioonid põrkavad negatiivse elektroodi – katoodiga – kokku ning löövad sealt välja elektrone, mis hakkavad liikuma positiivse elektroodi – anoodi – poole. Ajaühikus vabastatud elektronide arvu – $\dot{N}_e$ – ning ajaühikus katoodiga kokku põrkuvate ioonide arvu – $\dot{N}_i$ – suhe kannab sekundaarse elektronide emissiooni teguri nime $\gamma = \dot{N}_e/\dot{N}_i$.




Elektronlaviini teket seletame järgmiselt. Elektriväli kiirendab vabu elektrone, mis saavad piisava kineetilise energia, et gaasiaatomitega kokku põrkudes neid ioniseerida. Niisiis, anoodi poole liikuvate vabade elektronide arv kasvab oluliselt. Seda protsessi kirjeldatakse Townsendi teguri $\alpha$ abil, mis kirjeldab elektronide arvu suurenemist $dN_e$ vahemaad $dl$ läbinud $N_e$ elektroni tõttu, s.t.

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$

Summaarne vool $I$ igas gaasiga täidetud ala ristlõikes koosneb ioonide voolust $I_i(x)$ ning elektronide voolust $I_e(x)$, mis statsionaarses olekus sõltuvad koordinaadist $x$, nagu näidatud ülaltoodud joonisel. Elektronide vool $I_e(x)$ muutub sõltuvalt $x$-st vastavalt valemile

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

kus $A_1, A_2, C_1$ on mõned konstandid.

| | |
|---|---|
| B1 | Leidke $A_1, A_2$ ning avaldage need suuruste $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$ kaudu. (2 punkti) |

Ioonide vool $I_i(x)$ sõltub $x$-st vastavalt valemile

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

kus $B_1, B_2, C_2$ on mõned konstandid.

| | |
|---|---|
| B2 | Leidke $B_1, B_2$ ning avaldage need suuruste $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$ kaudu. (0.6 punkti) |
| B3 | Pange kirja tingimus suuruse $I_i(x)$ jaoks väärtusel $x = L$. (0.3 punkti) |
| B4 | Pange kirja seos suuruste $I_i(x)$ ja $I_e(x)$ vahel väärtusel $x = 0$. (0.6 punkti) |
| B5 | Leidke summaarne vool $I$ ning avaldage see suuruste $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ kaudu. Eeldage, et see jääb lõplikuks. (1.2 punkti) |

Olgu Townsendi tegur $\alpha$ konstantne. Kui gaasiga täidetud ala pikkus osutub suuremaks kindlast kriitilisest väärtusest, s.t. $L > L_{\text{cr}}$, siis võib välise ioniseerija välja lülitada ning gaaslahendus muutub ennast säilitavaks.

| | |
|---|---|
| B6 | Leidke $L_{cr}$ ning avaldage see suuruste $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ kaudu. (0.5 punkti) |