

Sissejuhatus

Meteoroid on komeedilt või asteroidilt pärinev väike osake (tavaliselt väiksem kui 1 m). Maapinda tabanud meteoroidi nimetatakse meteoriidiks.

Mitmed Läänemere ääres elavad inimesed nägid 2009. aasta 17. jaanuari ööl läbi atmosfääri Maale langeva meteoroidi helendavat saba või tulekera. Üks Rootsisis asuv valvekaamera salvestas sellest sündmusest video, vt Joonis 1.1(a). Nende kaadrite ja pealtnägijate ütluste abil oli võimalik tuvastada kokkupõrke eeldatav piirkond ja kuus nädalat hiljem leiti meteoriid massiga 0,025 kg Maribo linna lähedusest Lõuna-Taanis. Mariboks nimetatud meteoriidi ja selle orbiidiga seotud mõõtmised tõid välja huvitavaid tulemusi. Meteoriidi kiirus atmosfääri sisenemisel oli erakordselt suur. Meteoriidi vanus, $4,567 \times 10^9$ aastat, näitab, et see on tekkinud vahetult pärast Päikesesüsteemi sündi. Maribo meteoriit on arvatavasti tükike Encke-nimelisest komeedist.

Maribo kiirus

Tulekera liikus ligikaudu lääne suunas, täpsemini asimuudiga 285° põhjasuuna suhtes, kohani, kust see hiljem leiti, vt Joonis 1.1. Meteoriit leiukoht asus kauguselt 195 km valvekaamerast, kusjuures suunavektor asus nurga all 230° põhjasuuna suhtes.

1.1	Kasutage neid andmeid ning samuti andmeid Jooniselt 1.1 ja arvutage Maribo keskmine kiirus kaadrite nr 155 ja nr 161 vahele jäänud ajavahemikus. Maakera kumeruse ja meteoroidile mõjuva gravitatsioonijõuga mitte arvestada.	1.3
-----	---	-----

Läbi atmosfääri ja sulamine?

Meteoroidi liikumisel kõrgel atmosfääris mõjub sellele õhuhõõre, mis sõltub keerukal moel meteoroidi kujust ja kiirusest, samuti atmosfääri temperatuurist ja tihedusest. Mõistlik lähendus hõõrdejõu F jaoks kõrgel atmosfääris on antud valemiga $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, kus k on konstant, ρ_{atm} on atmosfääri tihedus, A on meteoroidi ristlõikepindala ja v meteoroidi kiirus.

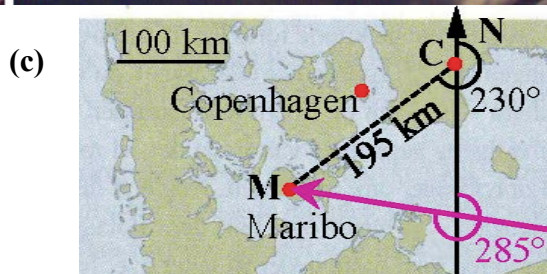
Meteoroidi analüüsimiseks tehakse järgnevad lihtsustavad eeldused: atmosfääri sisenenud objekt oli kera massiga $m_M = 30$ kg, raadiusega $R_M = 0,13$ m, temperatuuriga $T_0 = 200$ K ja kiirusega $v_M = 2,91 \times 10^4$ m/s. Atmosfääri tiheduse loeme konstantseks $\rho_{\text{atm}} = 4,1 \times 10^{-3}$ kg/m³ (see on tiheduse väärtus kõrgusest 40 km kõrgemal), hõõrdekonstandi väärtus on $k = 0,60$.

1.2a	Hinnake, kui palju aega (alates atmosfääri sisenemisest) kulub selleks, et meteoroidi kiirus kahaneks 10 % võrra kiiruselt v_M kiiruseni $0,90 v_M$. Meteoroidile mõjuva gravitatsioonijõuga mitte arvestada ning eeldage, et meteoroid säilitab oma massi ja kuju.	0.7
1.2b	Arvutage, kui mitu korda on atmosfääri siseneva meteoroidi kineetiline energia E_{kin} suurem energiast E_{melt} , mis kulub meteoroidi täielikuks sulatamiseks (vt andmelehte).	0.3



(b)

Kaader	Aeg	Asimuut	Kõrgus
155	1.46 s	215°	19.2°
161	2.28 s	221°	14.7°
Maandumine punktis M		230°	0.0°



Joonis 1.1 (a) Kaadrite seeria, mis pärineb Rootsi valvekaamera lindistuselt, mis näitab Maribo liikumist tulekerana läbi atmosfääri. (b) Kahele kaadri vastavad andmed, kus on näidatud aeg, kaamera asukohast (C) arvestatud suund (asimuut) kraadides ning kõrgus horisondi suhtes kraadides. (Asimuut tähistab suunda, mis on mõõdetud päripäeva alates põhjasuunast horisontaaltasandis.) (c) Suundade skeem. Maribo trajektuur on tähistatud lilla noolega, põhjasuund on tähistatud noolega N, maandumispaik on tähistatud tähega M ning kaamera asukoht tähega C.

Maribo soojenemine selle langemisel atmosfääris

Kui kivine meteoroid Maribo sisenes atmosfääri ühelikiirus, paistis see tulekerana, sest ümbritsev õhk hakkas kuumusest helendama. Sellegipoolest soojenes ainult Maribo välimine kiht. Eeldage, et Maribo on homogeenne kera tihedusega ρ_{sm} , erisoojusega c_{sm} ja soojusjuhtivusteguriga k_{sm} (arvväärtused võtke andmelehel). Atmosfääri sisenedes oli meteoroidi temperatuur $T_0 = 200$ K, kuid läbi atmosfääri langedes oli õhuhõõrde tõttu meteoroidi pinnatemperatuur konstantselt $T_s = 1000$ K, mistõttu hakkas meteoroidi sisemus aina soojenema.

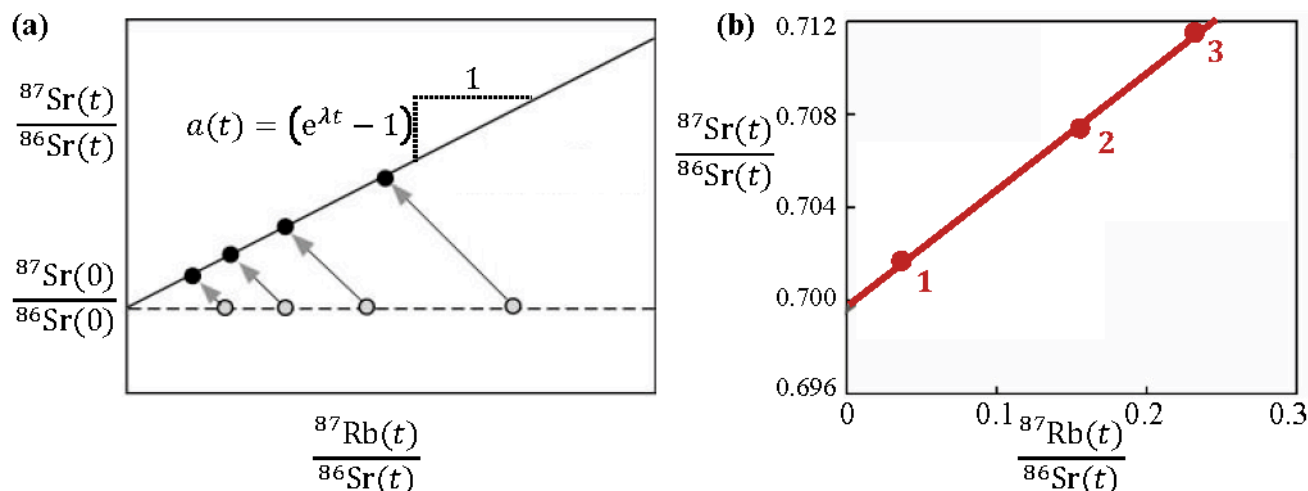
Olles aja t jooksul atmosfääris liikunud, on Maribo kuuma (temperatuur märkimisväärselt kasvanud võrreldes T_0 -ga) väliskihi paksus x . Seda paksust saab hinnata dimensionaalse analüüsiga, eeldades, et see on termodünaamiliste parameetrite mingite astmete korrutis: $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$.

1.3a	Kasutades dimensionaalset (ühikute) analüüsi, leidke nelja astendaja α , β , γ , ja δ väärtused.	0.6
1.3b	Arvutage paksus x pärast langemise aega $t = 5$ s ja leidke suhe x/R_M .	0.4

Meteoriidi vanus

Radioaktiivsete elementide keemilised omadused võivad olla erinevad, nii et mineraalide kristalliseerumise ajal antud meteoriidis võib osades mineraalides olla suurem sisaldus mingit radioaktiivset elementi, kuid teistes mineraalides madalam. Selle erinevuse tõttu saab määrata meteoriiidi vanust, kasutades meteoriidis sisalduvate radiaktiivsete mineraalide radiomeetrist dateerimist.

Konkreetsena uurime isotoopi ^{87}Rb (element nr 37), mis laguneb stabiilseks isotoobiks ^{87}Sr (element nr 38) poolestusajaga $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ aastat, võrrelduna stabiilse isotoobiga ^{86}Sr . Kristalliseerumise hetkel oli suhe $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ sama kõigis mineraalides, kuid suhe $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ oli erinev. Aja möödudes ^{87}Rb hulk väheneb lagunemise tõttu ning järelikult ^{87}Sr hulk suureneb. Selle tulemusena on täna mõõdetud suhe $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ erinev esialgselt. Punktid Joonise 1.2(a) horisontaalsel joonel vastavad suhte $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ väärtustele erinevates mineraalides kristalliseerumise hetkel.



Joonis 1.2 (a) Suhe $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ erinevates mineraalides kristalliseerumise hetkel $t = 0$ (avatud ringid) ja praegusel hetkel (täidetud ringid). **(b)** Meteoriidilt võetud kolme proovi isokroon-joon praegusel hetkel.

1.4a	Kirjutage välja lagunemise võrrand, kus ^{87}Rb -st tekib ^{87}Sr .	0.3
1.4b	Näidake, et kui samast meteoriidist võetud mineraaliproovid kanda graafikule, kus y-teljel on praegusel hetkel mõõdetud suhe $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ ning x-teljel praegusel hetkel mõõdetud suhe $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$, siis moodustub isokroon-jooneks nimetatav sirge tõusuga $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Siin t tähistab aega, mis on möödunud mineraalide tekkimise hetkest ning λ on lagunemiskonstant, mis on pöördvõrdeline poolestusajaga $T_{1/2}$.	0.7
1.4c	Määrake meteoriiidi vanus τ_M kasutades Joonise 1.2(b) isokroon-joont.	0.4

Komeet Encke, millelt Maribo võis pärineda

Orbiidil ümber Päikese on komeet Encke ja Päikese vaheline minimaalne ja maksimaalne kaugus vastavalt $a_{\min} = 4,95 \times 10^{10}$ m ja $a_{\max} = 6,16 \times 10^{11}$ m.

1.5	Arvutage komeet Encke orbitaalperiood t_{Encke} .	0.6
-----	--	-----

Asteroiditabamuse mõju Maale

65 miljonit aastat tagasi tabas Maad hiiglaslik asteroid tihedusega $\rho_{\text{ast}} = 3,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, raadiusega $R_{\text{ast}} = 5,0 \text{ km}$ ja lõppkiirusega $v_{\text{ast}} = 2,5 \times 10^4 \text{ m/s}$. Kokkupõrke tagajärjel hävis suurem osa maapealsest elust ja tekkis suur Chicxulubi kraater. Kujutlege, et samasugune asteroid tabaks täna Maad mitte-elastse kõkkupõrkega. Arvestage, et Maa inertsimoment moodustab 0,83 homogeense kera, millel on Maa mass ja raadius, inertsimomendist $\frac{2}{5}MR^2$. Maa orbiidi muutustega mitte arvestada.

1.6a	Tabagu asteroid põhjapoolust. Leidke maksimaalne nurk, mille võrra võib muutuda Maa telje suund pärast kokkupõrget.	0.7
1.6b	Tabagu asteroid radiaalselt ekvaatorit. Leidke Maa pöörlemisperioodi muutus $\Delta\tau_{\text{rad}}$ kokkupõrke tagajärjel.	0.7
1.6c	Tabagu asteroid ekvaatorit tangentsiaalselt ekvaatoriaaltasandis. Leidke Maa pöörlemisperioodi muutus $\Delta\tau_{\text{tan}}$ kokkupõrke tagajärjel.	0.7

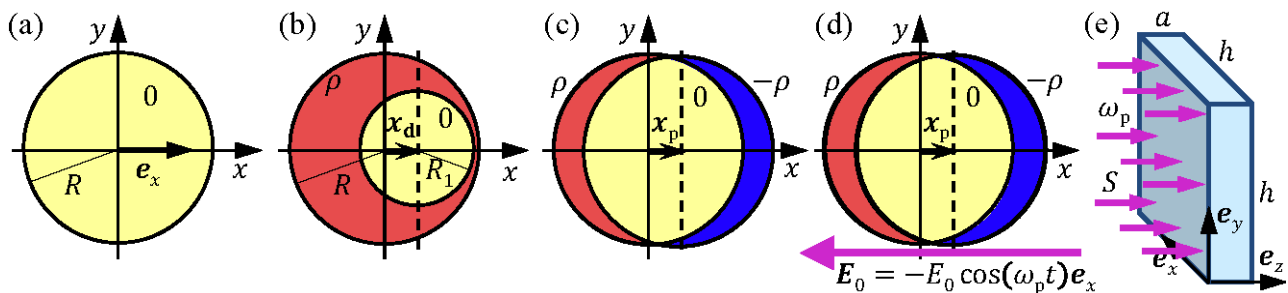
Maksimaalne kokkupõrkekiirus

Vaadeldgem objekti, mis on gravitatsiooniliselt seotud päikesesüsteemiga ning mis tabab maapinda kiirusega v_{imp} . Esialgu võib Maa gravitatsioonivälja mõju objektile lugeda tühiseks. Hõõrdumisega atmosfääris, teiste taevakehade mõjuga ning Maa pöörlemisega mitte arvestada.

1.7b	Arvutage kokkupõrkekiiruse v_{imp} suurim võimalik väärtus v_{imp}^{\max} .	1.6
------	---	-----

Sissejuhatus

Selles ülesandes uurime efektiivset auru tootmise meetodit, mida on praktikas edukalt rakendatud. Sfääriliste nanomeetri-suuruste hõbeosakeste (nanoosakeste) vesilahust (konsentratsiooniga ainult 10^{13} osakest liitri kohta) valgustatakse fookuseeritud valguskiirega. Nanoosakesed neelavad osa valgusest, soojenevad ning genereerivad nende vahetus läheduses auru ilma kogu vesilahust soojendamata. Aur lahkub süsteemist aurumullidema. Nähtuse kõik detailid pole praeguseni lõpuni selged, kuid peamine protsess on valguse neeldumine metallist nanoosakeste elektronide kollektiivsete ehk nn. plasmooniliste võnkumiste abil. Seadet tuntakse „plasmoonilise aurugeneraatori“ nime all.



Joonis 2.1 (a) Sfääriline laenguta nanoosake raadiusega R asub koordinaatide alguspunktis. (b) Sfäär homogeense positiivse laengutihedusega ρ (punane), mille sees on väiksem sfääriline laenguta piirkond (0, kollane) raadiusega R_1 , mille keskpunkt on nihutatud $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ võrra. (c) Sfäär positiivse laengutihedusega ρ (sama mis nanoosakese hõbedaioonidel) asub koordinaatide alguspunktis. Negatiivse laengutihedusega $-\rho$ sfäärilise piirkonna (sinine) keskpunkt on nihutatud \mathbf{x}_p võrra, kus $x_p \ll R$. (d) Väline homogeenne elektriväli $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$. Ajast sõltuva \mathbf{E}_0 korral liigub elektronide pilv kiirusega $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (e) Risttahukakujuline anum ($h \times h \times a$), mis sisaldab nanoosakeste vesilahust. Anumale langeb z -telje suunaline monokromaatne valgus ringsagedusega ω_p ning intensiivsusega S .

Üksik hõbeda nanoosake

Selle ülesande vältel vaatleme sfäärilist hõbeda nanoosakest raadiusega $R = 10,0$ nm, mille keskpunkt on fikseeritud koordinaatide alguspunkti, vt. Joonis 2.1(a). Kogu liikumine, kõik jõud ning liikumapanevad väljad on paralleelsed horisontaalse x -teljega (ühikvektoriga \mathbf{e}_x). Nanoosake sisaldab vabu (juhtivus-) elektrone, mis liiguvad läbi kogu nanoosakese ruumala ning ei ole seotud ühegi hõbeda aatomiga. Iga hõbeda aatom on positiivne ioon, mis on panustanud ühe sellise vaba elektroni.

2.1	Leidke järgmised suurused: nanoosakese ruumala V ja mass M , hõbedaioonide arv N ja hõbedaioonide laengutihedus ρ nanoosakeses, ning vabade elektronide kontsentratsioon n , nende summaarne laeng Q ning summaarne mass m_0 .	0.7
-----	---	-----

Elektriväli laengu-neutraalses piirkonnas laetud sfääri sees

Ülesande lõpuni võite eeldada, et kõikide materjalide suhteline dielektriline läbitavus on $\epsilon = 1$.

Raadiusega R ning homogeense laengutihedusega ρ laetud sfääri sisemusesse tekitab väike sfääriline laenguta piirkond raadiusega R_1 , lisades sinna lisati negatiivset laengutihedust $-\rho$, mille keskpunkt on nihutatud $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ võrra suure sfääri keskpunktist, vt. Joonis 2.1(b).

2.2	Näidake, et laengu-neutraalse piirkonna sees on elektriväli homogeenne ning avaldub kujul $\mathbf{E} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_d$. Leidke tegur A .	1.2
-----	--	-----

Nihutatud elektronipilve mõjuv taastav jõud

Järgnevas uurime vabade elektronide kollektiivset liikumist ning modelleerime elektrone kui üht negatiivselt laetud sfääri homogeense laengutihedusega $-\rho$, mille keskpunkti asukoht on \mathbf{x}_p . Sfäär saab liikuda mööda x -telge positiivselt laetud (hõbedaioonide) sfääri suhtes, mis on fikseeritud koordinaatide alguspunkti, vt. Joonis 2.1(c). Eeldage, et väline jõud \mathbf{F}_{ext} nihutab elektronipilve uude tasakaalupunkti $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$, kus $|x_p| \ll R$. Enamik nanoosake sisemusest – peale vastastikutest otstes tekkivaid pisikesi laenguid – on laengu-neutraalne.

2.3	Avaldage järgmised kaks suurust: elektronipilve mõjuv taastav jõud \mathbf{F} ning töö W_{el} , mis tehakse elektronipilve nihutamiseks. Kasutage suurusi \mathbf{x}_p and n .	1.0
-----	---	-----

Sfääriline hõbeda nanoosake välises konstantses elektriväljas

Nanoosake on asetatud vaakuumisse ning teda mõjutab välise staatilise homogeense elektrivälja $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$ tekitatud välisjõud \mathbf{F}_{ext} , mis jõud nihutab elektronipilve väikese vahemaa $|x_p|$ võrra, kus $|x_p| \ll R$.

2.4	Leidke elektronipilve nihe x_p funktsioonina E_0 -st ja n -st; samuti leidke suurus $-\Delta Q$, mis tähistab nanoosakest poolitava yz -tasandit läbinud elektronide laengu kogusuurus, funktsioonina muutujatest n , R ja x_p .	0.6
-----	---	-----

Hõbeda nanoosakese ekvivalentne mahtuvus ja induktiivsus

Nii konstantse kui ka ajast sõltuva välja \mathbf{E}_0 jaoks saab nanoosakest modelleerida kui ekvivalentset elektrihaelat. Ekvivalentset mahtuvust saab leida, kui siduda laengute ΔQ eraldamisel tehtav töö W_{el} ning laenguid $\pm \Delta Q$ hoidva kondensaatori energia. Laengute eraldamine põhjustab teatud ekvivalentse pinge V_0 tekkimist ekvivalentses kondensaatoris.

2.5a	Avaldage süsteemi ekvivalentne mahtuvus C suuruste ϵ_0 ja R kaudu ning leidke selle väärtus.	0.7
2.5b	Leitud mahtuvuse jaoks avalda suuruste E_0 ja R kaudu ekvivalentne pinge V_0 , mida tuleb rakendada ekvivalentsele kondensaatorile, et sellele koguneks laeng ΔQ .	0.4

Ajast sõltuva välja \mathbf{E}_0 korral liigub elektronipilv kiirusega $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, vt. Joonis 2.1(d). Pilvel on kineetiline energia W_{kin} ning tema liikumisel läbi fikseeritud yz -tasandi tekib elektrivool I . Elektronipilve kineetilist energiat saab käsitleda kui ekvivalentse induktori energiat, mille induktiivsus on L ning milles voolab vool I .

2.6a	Avaldage W_{kin} ja I kiiruse v kaudu.	0.7
2.6b	Avaldage ekvivalentne induktiivsus L nanoosakese raadiuse R , elektroni laengu e ja massi m_e ning elektronide kontsentratsiooni n kaudu, ning arvutage selle väärtus.	0.5

Hõbeda nanoosakese plasmooniline resonants

Eelnevast analüüsist järeldub, et elektronipilve tasakaalupunktist nihutamisest ning selle järgnevalt vabastamisest tekkivat liikumist saab modelleerida ideaalse LC -ahelana, mis võngub resonantsis. Selline elektronipilve dünaamiline käitumine on tuntud kui "plasmooniline resonants", kus elektronipilv võngub nn. plasmoonilise ringsagedusega ω_p .

2.7a	Leidke avaldis elektronipilve võnkumiste ehk plasmoonilise ringsageduse ω_p jaoks, kasutades elektroni laengut e ning massi m_e , elektronide kontsentratsiooni n ja vaakumi dielektrilist läbitavust ϵ_0 .	0.5
2.7b	Arvutage ω_p (ühikud rad/s) ja vaakumis leviva valguse ringsagedusega $\omega = \omega_p$ lainepikkus λ_p (nm).	0.4

Hõbeda nanoosakese valgustamine valgusega plasmoonilisel sagedusel

Edaspidi valgustatakse nanoosakesest monokromaatselt valgusega, mille ringsagedus on võrdne plasmoonilise ringsagedusega ω_p , ning mille intensiivsus osakestele langemisel on $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$. Kuna lainepikkus on suur, $\lambda_p \gg R$, võib eeldada, et nanoosake asub homogeenses harmooniliselt võnkuvast väljas $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Välja \mathbf{E}_0 mõjul võngub elektronipilve keskpunkt $\mathbf{x}_p(t)$ sama sagedusega kiirusega $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$ ning konstantse amplituudiga x_0 . Sellise elektronide võnkumise liikumise tõttu toimub valguse neelamine. Osakese poolt püütud energia muutub kas osakese sisemiseks soojusenergiaks või kiiratakse tagasi hajunud valgusena.

Soojusenergiaks muutub neelatud energia juhuslike mitte-elastsete põrgete tõttu: iga vaba elektron põrkab aeg-ajalt kokku mõne hõbedaiooniga ning kaotab kogu oma kineetilise energia, mis muundub hõbedaioonide vibratsioonideks (soojuseks). Keskmine aeg põrgete vahel on $\tau \gg 1/\omega_p$, kus hõbeda nanoosakese jaoks $\tau = 5.24 \times 10^{-15} \text{ s}$.

2.8a	Leidke avaldised üle aja keskmistatud soojusvõimsuse P_{heat} ning samuti üle aja keskmistatud voolu ruudu $\langle I^2 \rangle$ jaoks nanoosakeses. Vastuses kasutage suurust $\langle v^2 \rangle$, mis on üle aja keskmistatud elektronipilve kiiruse ruut.	1.0
2.8b	Leidke avaldis ekvivalentse oomilise takistuse R_{heat} jaoks ekvivalentse takisti mudelis, kus nanoosakese soojusvõimsus P_{heat} tuleneb elektronipilve voolust I . Arvutage R_{heat} numbriline väärtus.	1.0

Langev valguskiir kaotab üle aja keskmistatud võimsust P_{scat} võnkuvast elektronipilvest hajunud (ehk siis neelatud ja uuesti kiiratud) valgusena. P_{scat} sõltub hajutamise allika amplituudist x_0 , laengust Q , ringsagedusest ω_p ja valguse omadustest (selle kiirusest c ning vaakumi dielektrilisest läbitavusest ϵ_0) järgmisel viisil: $P_{\text{scat}} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$.

2.9	Kasutades avaldist P_{scat} , leidke avaldis ekvivalentse hajutamise takistuse R_{scat} (analoogselt R_{heat} leidmisega) jaoks ekvivalentse takisti mudelis; arvutage selle väärtus.	1.0
-----	--	-----

Ülalnimetatud ekvivalentsetest vooluringi elementidest pannakse kokku jadamisi *LCR*-vooluring, mis on hõbeda nanoosakese mudeliks ning mille otstele on rakendatud harmooniliselt võnkuv ekvivalentne pinge $V = V_0 \cos(\omega_p t)$, mis sõltub langeva valguse elektriväljast E_0 .

2.10a	Leidke avaldised üle aja keskmistatud võimsuskadude P_{heat} ja P_{scat} jaoks. Kasutage suurust E_0 , mis on langeva valguse elektrivälja amplituud; valgus levib plasmoonilise ringsagedusega ($\omega = \omega_p$).	1.2
2.10b	Arvutage E_0 , P_{heat} ja P_{scat} numbrilised väärtused.	0.3

Auru genereerimine valgusega

Hõbeda nanoosakeste vesilahus oli valmistatud ette kontsentratsiooniga $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$. See valatakse risttahukakujulise anumasse, mille mõõtmed on $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ cm}^3$, ning anumast valgustatakse selle suuremale küljele risti langeva valgusega sama intensiivsusega, $S = 1.00 \text{ MW m}^{-2}$, ning plasmonilise sagedusega nagu ennegi; vt. Joonis 2.1(e). Vee temperatuur on $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ning saame teha mõistliku eelduse, et statsionaarses olekus läheb kogu nanoosakeses eraldav soojus auru genereerimisele temperatuuril $T_{\text{st}} = 110 \text{ }^\circ\text{C}$ ilma ümbritseva vee temperatuuri tõstmata.

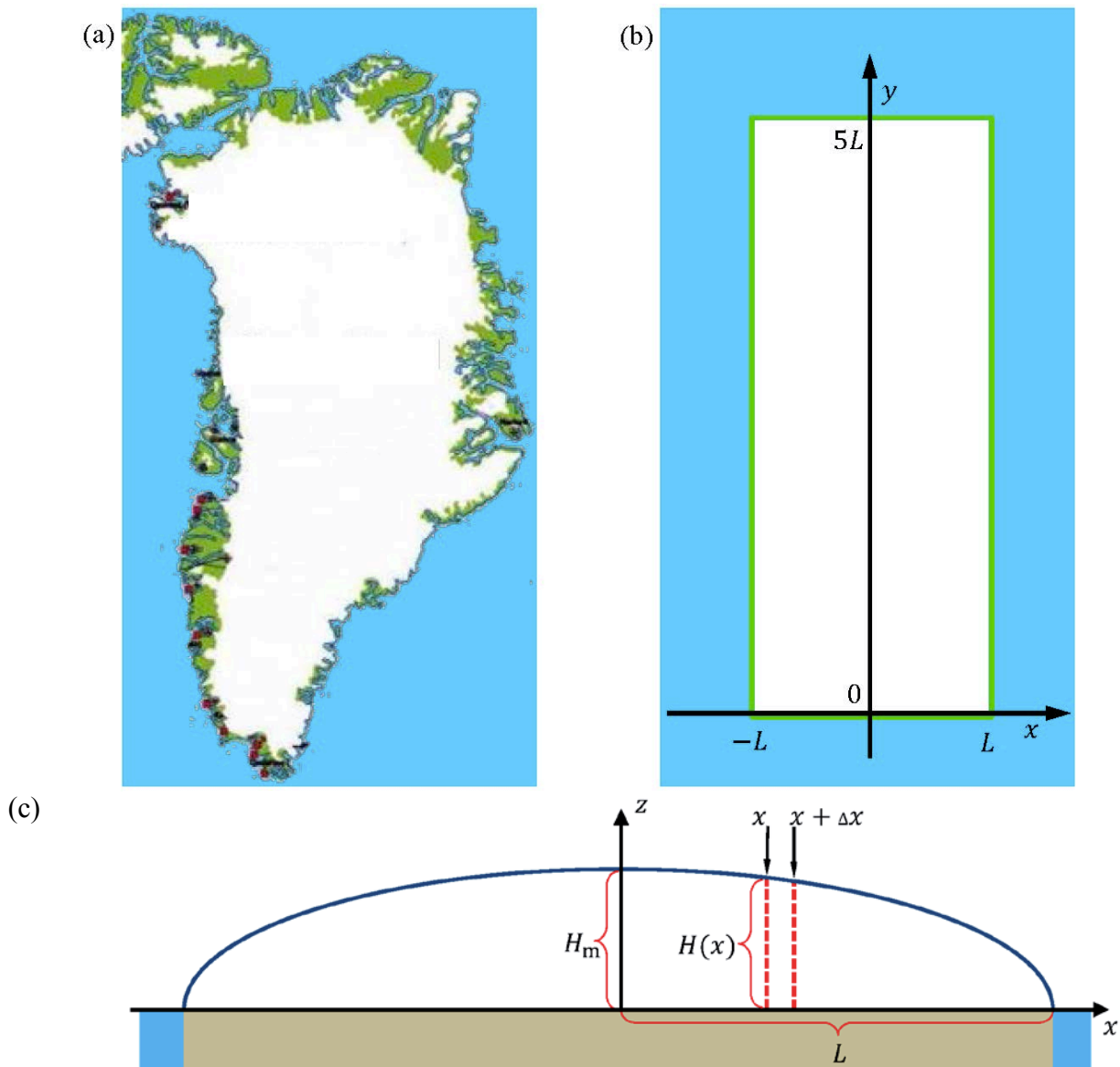
Plasmoonilise aurugeneraatori termodünaamiline efektiivsus η on defineeritud kui võimsuste suhe $\eta = P_{\text{st}}/P_{\text{tot}}$, kus P_{st} on võimsus, mis läheb auru genereerimiseks kogu anumasse, ning P_{tot} on kogu anumasse siseneva valguse võimsus.

Peaaegu kogu aeg on iga nanoosake vahetus kontaktis auruga, aga mitte veega, ning seega saab käsitleda vaakumis asuvana.

2.11a	Arvutage auru massi μ_{st} , mida toodab aurugeneraator igas sekundis, kui seda valgustatakse valgusega plasmoonilisel ringsagedusel ja intensiivsusega S .	0.6
2.11b	Arvutage plasmoonilise aurugeneraatori termodünaamilise efektiivsuse η numbriline väärtus.	0.2

Sissejuhatus

Käesolev ülesanne tegeleb Gröönimaa jääkate füüsika uurimisega. Gröönimaad katab maailma suuruselt teine liustik, vt Joonis 3.1(a). Lihtsustatult vaatleme Gröönimaa mudelina ristkülikukujulist saart laiusega $2L$ ja pikkusega $5L$, saare pind on merepinna kõrgusel ning saar on täielikult kaetud kokkusurumatu jääga (konstantne tihedus ρ_{ice}), vt Joonis 3.1(b). Jääkate paksuse profiil $H(x)$ ei sõltu y -koordinaadist; paksus kasvab nullist rannikul $x = \pm L$ kuni maksimaalse väärtuseni H_m saare keskeljel (y -telg), mida nimetatakse ka jäälahkmeks, vt Joonis 3.1(c).



Joonis 3.1 (a) Gröönimaa kaart, mis illustreerib jääkate (valge) ulatust, jäävaba rannikualasid (roheline) ning ümbritsevat ookeani (sinine). (b) Gröönimaa jääkate lihtsustatud mudel: jääkate katab ristkülikukujulise maa-ala küljepikkustega $2L$ ja $5L$. Jäälahkme piirkond ühtib y -teljega; sellel joonel on jääkate paksus maksimaalne ja võrdne H_m -ga. (c) Jääkate vertikaalne ristlõige (xz -tasand), mis näitab paksuse profiili $H(x)$ (sinine joon). $H(x)$ ei sõltu y -koordinaadist vahemikus $0 < y < 5L$, aga asukohtades $y = 0$ ning $y = 5L$ langeb järsku nullini. z -telg näitab jäälahkme positsiooni. Selguse huvides on vertikaalsed mõõtmised joonisel liialdatud võrreldes horisontaalsete mõõtmetega. Jää tihedus ρ_{ice} on konstantne.

Kaks kasulikku valemit

Selles ülesandes võib osutada kasulikuks integraal:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

ning lähendus $(1+x)^a \approx 1+ax$, mis kehtib $|ax| \ll 1$ jaoks.

Jääkate paksuse profiil

Lühikestel ajamastaapidel on liustik kokkusurumatu hüdrostaatiline süsteem muutumatu paksusprofiiliga $H(x)$.

3.1	Kirjutage välja avaldis rõhu $p(x, z)$ jaoks jääkihi sees funktsioonina vertikaalsest kõrgusest z (loetuna maapinnast) ning kaugusest x (loetuna jäälahkmest). Atmosfäärirõhuga mitte arvestada.	0.3
-----	--	-----

Vaadeldge tasakaalulist vertikaalset jääkihti väikese põhjapindalaga $\Delta x \Delta y$ koordinaatide x ja $x + \Delta x$ vahel, vt punaseid katkendjooni Joonisel 3.1(c). Vastused ei sõltu suurusest Δy . Selle kihi kahele vertikaalsele seinale mõjuvate horisontaalsuunaliste jõudude summa ΔF , mis tekib kõrguste erinevusest saare keskosa poolses ja rannikupoolses kihi küljes, on tasakaalustatud hõõrdejõuga $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ maapinnaosal pindalaga $\Delta x \Delta y$, kus $S_b = 100$ kPa.

3.2a	Antud väärtuse x jaoks näidake, et piirjuhul $\Delta x \rightarrow 0$ kehtib $S_b = kH dH/dx$ ja leidke k .	0.9
3.2b	Leidke avaldis paksusprofiili $H(x)$ jaoks sõltuvalt suurustest ρ_{ice} , g , L , S_b ja kaugusest x (mõõdetuna jäälahkmest). Avaldisest ilmneb, et maksimaalne liustiku paksus H_m skaleerub pool-laiusega L kui $H_m \propto L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Leidke eksponent γ , mis kirjeldab jääliustiku koguruumala V_{ice} skaleerumist ristkülikukujulise saare pindalaga A , $V_{ice} \propto A^\gamma$.	0.5

Dünaamiline jääliustik

Pikematel ajamastaapidel käitub jää kokkusurumatu viskoosse vedelikuna, mis voolab gravitatsiooni mõjul saare keskosast ranniku poole. Siin mudelis säilitab jää oma paksuseprofiili $H(x)$ statsionaarsena - saare keskosas pealesadavast lumest tingitud jää juurdekasvu tasakaalustab sulamine rannikul. Lisaks jääkihi geomeetriaale Joonistelt 3.1(b) ja (c) tehke järgnevad lihtsustavad eeldused:

- 1) Jää voolab lahkemest (y -telg) eemale xz -tasandis.
- 2) Juurdekasvutegur c (m/year) saare keskosas on konstantne.
- 3) Jää saab liustikust lahkuda ainult sulades rannikul $x = \pm L$.
- 4) Jäävoolu kiiruse horisontaalne (x -)komponent $v_x(x) = dx/dt$ on sõltumatu z -st.
- 5) Jäävoolu kiiruse vertikaalne (z -)komponent $v_z(z) = dz/dt$ on sõltumatu x -st.

Vaadeldge ainult keskosa lähedas piirkonda $|x| \ll L$, kus jääkihi kõrguse muutused on väikesed ja neid võib seega eirata, st $H(x) \approx H_m$.

3.3	Kasutades massijäävuse seadust, leidke avaldis jäävoolu horisontaalse kiiruskomponendi $v_x(x)$ jaoks sõltuvalt suurustest c , x , ja H_m .	0.6
-----	---	-----

Kokkusurumatuse eeldusest (st jää tihedus ρ_{ice} on konstantne) järeldeb, et massijäävuse tõttu kehtib jää voolamise kiiruskomponentide jaoks järgnev kitsendus:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Kirjutage välja avaldis jää voolamise vertikaalse kiiruskomponendi $v_z(z)$ jaoks sõltuvalt kõrgusest z .	0.6
-----	---	-----

Väike jääosake algse asukohaga liustiku pinnal $(x_i, H(x_i))$ voolab ajapikku liustiku osana mööda voolutrajektoori $z(x)$ vertikaalses xz -tasandis.

3.5	Tuletage avaldis sellise voolutrajektoori $z(x)$ jaoks.	0.9
-----	---	-----

Vanuse ja kliima indikaatorid dünaamilises liustikus

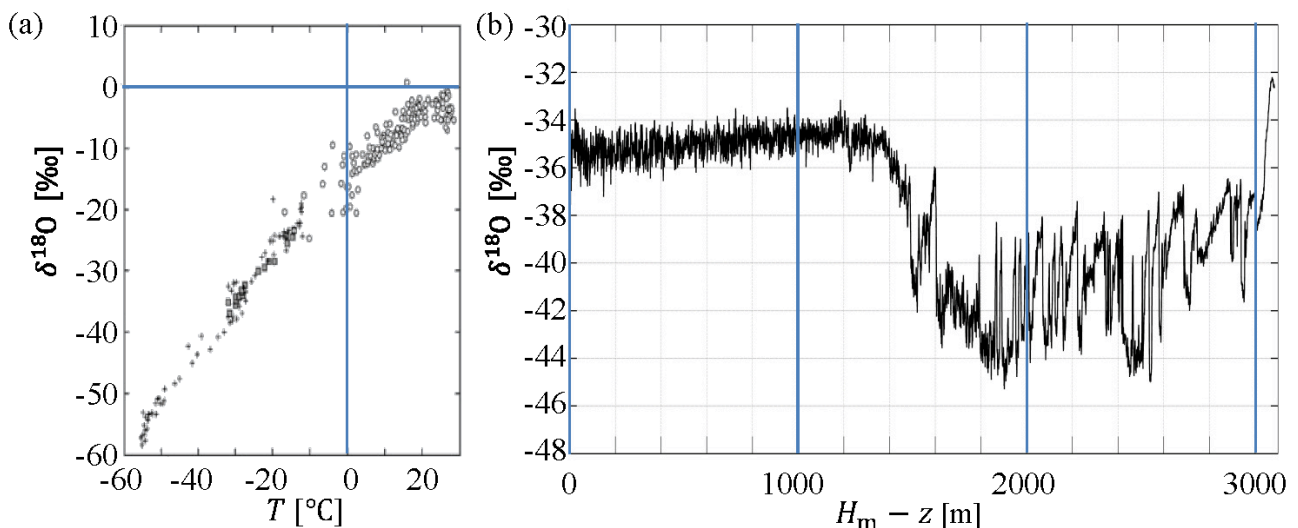
Jäävoolu kiiruskomponentide $v_x(x)$ and $v_z(z)$ abil on võimalik hinnata jää vanust $\tau(z)$ antud sügavusel $H_m - z$ mõõdetuna liustiku pinnast.

3.6	Leidke avaldis jää vanuse $\tau(z)$ jaoks funktsioonina kõrgusest z (maapinnast mõõdetuna) jäälahkme asukohas $x = 0$.	1.0
-----	---	-----

Puurides Gröönimaal läbi liustiku, saame võtta proove mineviku lumekihtidest, mis võimaldavad analüüsida minevikus toimunud kliimamuutusi. Üks paremaid indikaatorid on nn $\delta^{18}\text{O}$, mis on defineeritud kui

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{\text{ice}} - R_{\text{ref}}}{R_{\text{ref}}} 1000 \text{ ‰},$$

kus $R = [^{18}\text{O}]/[^{16}\text{O}]$ tähistab kahe hapnikuisotoobi ^{18}O ja ^{16}O sisalduse suhet. Referentsväärtus R_{ref} põhineb ekvatoriaalookeanites leiduval muutumatul koostisel.



Joonis 3.2 (a) Lumest mõõdetud $\delta^{18}\text{O}$ sõltuvana aasta keskmisest pinnatemperatuurist T . **(b)** $\delta^{18}\text{O}$ sõltuvana liustiku pinnast mõõdetud sügavusest $H_m - z$. Andmed pärinevad jääproovist, mis saadi puurides alates jää pinnast kuni aluskivimini ühes kindlas kohas Gröönimaa jäälahkmel, kus $H_m = 3060$ m.

Gröönimaa jää vaatlused viitavad, et $\delta^{18}\text{O}$ väärtus lumes muutub praktiliselt lineaarselt temperatuuriga, vt Joonis 3.2(a). Eeldades, et see on alati niiviisi olnud, võimaldab jääproovist sügavusel $H_m - z$ arvatud $\delta^{18}\text{O}$ hinnata temperatuuri T Gröönimaa ümbruses $\tau(z)$ aega tagasi.

Gröönimaa 3060 m jääproovist pärinevad $\delta^{18}\text{O}$ mõõtmised näitavad, et sügavusel 1492 m, vt Joonis 3.2(b), toimub järsk muutus $\delta^{18}\text{O}$ väärtuses, mis tähistab viimase jääaja lõppu. Jääaeg algas 120.000 aastat tagasi, mis vastab sügavusele 3040 m. Praegune jääaegade vaheline aeg algas 11 700 aastat tagasi, mis vastab sügavusele 1492 m. Eeldage, et neid kaht perioodi võid kirjeldada kahe erineva juurdekasvuteguriga c_{ia} (jääaeg) ja c_{ig} (jääaegade vaheline aeg). Võite eeldada, et H_m on konstantne kogu nende 120 000 aasta jooksul.

3.7a	Määrake juurdekasvutegurid c_{ia} ja c_{ig} .	0.8
3.7b	Kasutage andmeid Jooniselt 3.2 ja leidke temperatuurimuutus jääaja ja jääaegade vahelise aja vahel.	0.2

Gröönimaa jääkate sulamisest tingitud meretaseme tõus

Gröönimaa jääkate täielik sulamine põhjustab maailmamere taseme tõusu. Et hinnata seda tõusu, võime lihtsalt vaadelda ühtlast tõusu kõikjal maailmameres konstantse pindalaga $A_0 = 3,61 \times 10^{14} \text{ m}^2$.

3.8	Arvutage keskmine maailmamere taseme tõus, mida võiks põhjustada Gröönimaa jääkate täielik sulamine. Jääkate tänapäevane pindala on $A_G = 1.71 \times 10^{12} \text{ m}^2$ ning $S_b = 100 \text{ kPa}$.	0.6
-----	--	-----

Gröönimaa massiivne jääkate tõmbab ümbritsevat ookeani gravitatsiooniliselt enda poole. Kui jääkate sulab, siis see kohalik meretaseme tõus kaob ning meretase Gröönimaa vahetuses läheduses tegelikult langeb. See efekt osaliselt kompenseerib üleval arvatud meretaseme tõusu.

Et hinnata veele rakendatud gravitatsioonilise tõmbe suurust, modelleerime Gröönimaa jääkatet kui punktmassi, mis paikneb nullkõrgusel ning mille mass on võrdne kogu Gröönimaa jää massiga. Kopenhaagen asub sellest punktmassist kaugusel 3500 km piki maa pinda. Maad võib käsitleda – ilma selle punktmassita – kui sfääriliselt sümmeetrilist keha, mille kogu pindala katab maailmameri pindalaga $A_E = 5,10 \times 10^{14} \text{ m}^2$. Kõiki Maa pöörlemisest tingitud efekte võib eirata.

3.9	Kasutades seda mudelit, leidke vahe $h_{CPH} - h_{OPP}$ meretasemete vahel Kopenhaagenis (h_{CPH}) ja diametraalselt Gröönimaa vastas asuvas kohas (h_{OPP}).	1.8
-----	---	-----